

ЗАДАЧИ ПО КУРСУ ТЕОРИЯ ПЛАЗМЫ

Маренков Е.Д.

Кафедра «Физика плазмы» НИЯУ МИФИ

1. Функция распределения. Кинетическое уравнение без столкновений

Задача 1.1 Вычислить интеграл $\int_{0(-\infty)}^{\infty} x^n \exp(-\alpha x^2) dx$ для $n = 0, 2, \dots, 6$

Решение. Значения приведены в таблице.

n	$\int_0^{\infty} x^n \exp(-\alpha x^2) dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp(-\alpha x^2) dx$
0	$\frac{\pi^{1/2}}{2\alpha^{1/2}}$	$\frac{\pi^{1/2}}{\alpha^{1/2}}$
1	$\frac{1}{2\alpha}$	0
2	$\frac{\pi^{1/2}}{4\alpha^{3/2}}$	$\frac{\pi^{1/2}}{2\alpha^{3/2}}$
3	$\frac{1}{2\alpha^2}$	0
4	$\frac{3\pi^{1/2}}{8\alpha^{5/2}}$	$\frac{3\pi^{1/2}}{4\alpha^{5/2}}$
5	$\frac{1}{\alpha^3}$	0
6	$\frac{15\pi^{1/2}}{16\alpha^{7/2}}$	$\frac{15\pi^{1/2}}{8\alpha^{7/2}}$

Нечетные значения n вычисляются интегрированием по частям. Четные n - дифференцированием по параметру α интеграла Гаусса $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\pi / \alpha}$.

Отметим также выражение этих интегралов через гамма-функцию:

$$\int_0^{\infty} x^n \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{1}{2} \alpha^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Задача 1.2. Для дрейфующего распределения Максвелла $f = A \exp(-\beta(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2)$, $\beta = m / 2T$, определить: а) константу нормировки A ; б) среднюю скорость и поток; в) тензор плотности потока импульса; г) плотность потока энергии

Решение. Нормировка находится из условия $n = \int f(\mathbf{v}) d^3v$ и равна $A = n(\beta / \pi)^{3/2}$. Все интегралы берутся от минус до плюс бесконечности. Поток равен $\Gamma = \int \mathbf{v} f d^3v = n\mathbf{u}$. Тензор плотности потока импульса

$$P_{\alpha\beta} = \int m v_{\alpha} v_{\beta} f d^3v \quad (1.1)$$

Удобно сразу сделать замену $\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{w}$. Тогда получается

$$\Pi_{\alpha\beta} = mn u_{\alpha} u_{\beta} + \delta_{\alpha\beta} nT = \rho u_{\alpha} u_{\beta} + \delta_{\alpha\beta} P \quad (1.2)$$

Плотность потока энергии

$$\mathbf{q} = \int \frac{mv^2}{2} \mathbf{v} f d^3v = \mathbf{u} \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{5}{2} nT \right) = \Gamma \left(\frac{mu^2}{2} + \frac{5}{2} T \right) \quad (1.3)$$

Обращает на себя внимание 5/2 вместо 3/2 в выражении для объемной плотности энергии. Это связано с работой сил давления, которая дает вклад ΓT .

Задача 1.3. Определить поток частиц и энергии на стенку для газа с распределением Максвелла

Решение. $\Gamma_x = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f v_x dv_x dv_y dv_z = \frac{1}{4} n \bar{c} = \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8T}{\pi m}}$; $q_x = 2T \Gamma_x$

Задача 1.4. Определить изменение функции распределения невзаимодействующих между собой частиц, двигающихся только вдоль оси x . Рассмотреть начальное распределение вида а) $f_0(x, v) = \phi(x) \delta(v - v_0)$ и б) $f_0(x, v) = \psi(v) \delta(x)$.

Решение. Изменение функции распределения $f(x, v, t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

Его решение находится методом характеристик и имеет вид

$$f(x, v, t) = F(x - vt, v) \quad (1.5)$$

где F – любая функция от двух аргументов. В случае б) $f = \delta(x - vt) \psi(v)$. В случае а) $f = \phi(x - v_0 t)$. Оба ответа должны быть интуитивно понятны.

Задача 1.5. В начальный момент времени газ занимает полупространство $x < 0$. Пренебрегая столкновениями, найти плотность газа в последующие моменты времени. Ответ записать с помощью функции ошибок

$$E(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-y^2) dy$$

Решение. [ЛЛ 10] Изменение функции распределения дается уравнением

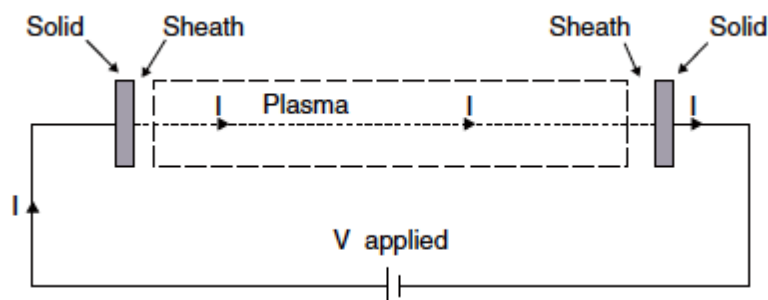
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (1.6)$$

Общее решение $f(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, \mathbf{v})$. Начальное распределение – максвелловское. Но нужно учесть, что до точки с координатой x долетают только частицы со скоростью $v_x > x/t$. Поэтому $f = 0$ для меньших скоростей. Следовательно, плотность

$$n(x, t) = \int_{x/t}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A \exp(-\beta v^2) dv_x dv_y dv_z = n_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} E \left(\frac{x}{t} \sqrt{\frac{m}{2T}} \right) \right) \quad (1.7)$$

2. Дебаевский слой

Задача 2.1 Горцами цилиндра с водородной плазмой служат плоские электроды, к которым приложено напряжение 12 В. Температура электронов в плазме 3 эВ, температура ионов много меньше температуры электронов. Найти потенциал электродов относительно плазмы, т.е. принимая за 0 потенциал в середине цилиндра.



Решение. [Stangeby] Сохранение заряда дает:

$$\Gamma_{e,l} + \Gamma_{e,r} = \Gamma_{i,l} + \Gamma_{i,r} = 2n_{se}c_s$$

где Γ - поток соответствующих частиц на левый (l) или правый (r) электроды, n_{se} - плотность на входе в слой, c_s - скорость звука.

Так как электроны распределены по Максвеллу-Больцману, то

$$\Gamma_{e,l,r} = 1/4 n_{se} \exp(e\phi_{l,r}/T) \quad (2.1)$$

Используя $\phi_r - \phi_l = \phi_{appl} < 0$, находим для потенциала левого электрода

$$\frac{e\phi_l}{T} = \ln \left[\frac{2 \exp(e\phi_{fl}/T)}{1 + \exp(e\phi_{appl}/T)} \right]$$

Здесь для удобства введен плавающий потенциал ϕ_{fl} , который для водородной плазмы равен примерно $\phi_{fl} = -3T/e$. Подставляя $\phi_{appl} = -12$ В, получаем $e\phi_l/T = -2.32$, то есть потенциал левого электрода -7 В, а правого, соответственно, -19 В.

Задача 2.2 То же, что задача 1, но рассмотреть случай электродов разной площади. Рассмотреть случай, когда площадь одного из электродов много больше другого. Это соответствует зонду Ленгмюра, больший электрод является стенкой камеры.

Решение. Отличие состоит только в том, что теперь должен сохраняться полный ток, ΓS . Потенциал левого электрода тогда равен:

$$\frac{e\phi_l}{T} = \ln \left[\frac{(S_l + S_r) \exp(e\phi_{fl} / T)}{S_l + S_r \exp(e\phi_{appl} / T)} \right] \quad (2.2)$$

Если площадь $S_l \gg S_r$, то есть левый электрод – это стенка камеры, а правый – зонд, то потенциал левого электрода равен плавающему независимо от приложенного напряжения. Ток на правый электрод $j_r = e(\Gamma_{i,r} - \Gamma_{e,r}) = en_{se}c_s(1 - \exp(e(\phi_r - \phi_{fl}) / T))$ определяет вольт-амперную характеристику зонда. Если $\phi_r \rightarrow -\infty$, то $j_r = en_{se}c_s$ выходит на насыщение, что соответствует тому, что правый электрод вытягивает все ионы из плазмы. Отметим, что противоположный случай, $\phi_r \rightarrow +\infty$, требует специального рассмотрения, так как в этом случае, наоборот, притягиваются электроны, и их также нельзя считать распределенными по Максвеллу в слое. Таким образом, выражение (2.2) справедливо только если $\phi_{r,l}$ не слишком отличаются от ϕ_{fl} .

Задача 2.3 Получить критерий Бома для плазмы из двух сортов ионов.

Решение. Уравнение для потенциала в слое

$$\Delta\varphi = -4\pi(Z_1n_1 + Z_2n_2 - n_e) \quad (2.3)$$

где $n_{1,2}$ – плотности ионов. Слой считается бесстолкновительным, поэтому скорость ионов

$$\frac{m_k v_k^2}{2} + Z_k e\varphi = \frac{m_k v_{ks}^2}{2} \quad (2.4)$$

s – означает скорость на входе в слой. Поток ионов сохраняется:

$$n_k v_k = n_{ks} v_{ks} \quad (2.5)$$

Из этих уравнений получается плотность ионов

$$v_k = v_{ks} \sqrt{1 - \frac{2Z_k e\varphi}{m_k v_{ks}^2}} \quad (2.6)$$

Подставляя в уравнение (2.3), находим:

$$\Delta\varphi = -4\pi e \left(\sum_k \frac{Z_k n_{ks}}{\sqrt{1 - \frac{2Z_k e\varphi}{m_k v_k^2}}} - n_{es} \exp\left(\frac{e\varphi}{T_e}\right) \right) \quad (2.7)$$

На входе в слой $\varphi \approx 0$. Разлагая в ряд, учитывая квазинеитральность $\sum_k Z_k n_{ks} = n_{es}$, условие положительности правой части, получается в виде:

$$\sum_k \frac{n_{ks}}{n_{es}} \frac{C_k^2}{v_{ks}^2} \leq 1 \quad (2.8)$$

где скорость звука для компоненты k $C_k = Z_k \sqrt{T_e / m_k}$. Это и есть условие, полученное Бомом.

(Заметим, что току насыщения соответствует противоположный случай $\varphi \rightarrow -\infty$; тогда из (2.7) получается закон Чайлда-Ленгмюра.)

3. Интеграл столкновений

Задача 3.1 Найти дифференциальное, полное, транспортное сечение для твердых упругих шаров.

Решение. Дифференциальное сечение см. в [ЛЛ 1], $d\sigma = \frac{(r_1 + r_2)^2}{4} d\Omega$, r – радиусы шаров.

Транспортное сечение $\sigma_t = \int (1 - \cos \alpha) d\sigma$ совпадает с полным и равно $\pi (r_1 + r_2)^2$.

Задача 3.2. В плазме находится примесь нейтральных атомов с функцией распределения f . Сечение ионизации электронным ударом σ . Исходя из больцмановского интеграла столкновений, получить уравнение для плотности нейтральных атомов. Рекомбинацией можно пренебречь.

Решение. Кинетическое уравнение для атомов

$$\frac{df_a(\mathbf{v})}{dt} = \int [f_a(\mathbf{v}') f_e(\mathbf{v}_1) - f_a(\mathbf{v}) f_e(\mathbf{v}_1)] v_{omn} I_{ae}(\chi, v_{omn}) d\Omega d^3v_1 \quad (3.1)$$

Здесь I_{ae} - дифференциальное сечение ионизации, зависящее от относительной скорости $\mathbf{v}_{omn} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$. Так как скорость электронов \mathbf{v}_1 много больше скорости атомов, то $v_{omn} = v_1$. Первое слагаемое соответствует рекомбинации, которой пренебрегаем. Тогда во втором слагаемом можно выполнить интегрирование по $d\Omega$, в результате имеем

$$\frac{df_a(\mathbf{v})}{dt} = -f_a(\mathbf{v}) \int f_e(\mathbf{v}_1) v_1 \sigma(v_1) d^3v_1 \equiv -f_a(\mathbf{v}) \langle \sigma v \rangle n_e \quad (3.2)$$

Интегрируя по скоростям, получается уравнение для плотности атомов:

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla(n_a \mathbf{V}) = -n_a n_e \langle \sigma v \rangle \quad (3.3)$$

4. Гидродинамика

Задача 4.1. Вязкая жидкость течет по цилиндрической трубе радиуса a . Для стационарного течения найти распределение скорости по радиусу в трубе и расход жидкости. Считать, что на расстоянии L создается разность давлений ΔP .

$$\text{Ответ. } v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2), \quad Q = \frac{\Delta p \rho R^4}{8\eta L}$$

Задача 4.2. Вязкая жидкость течет по кольцевой трубе с радиусами a и b . Для стационарного течения найти распределение скорости по радиусу в трубе и расход жидкости. Считать, что на расстоянии L создается разность давлений ΔP .

$$\text{Ответ. } v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} \left(R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)} \ln \frac{r}{R_2} \right), \quad Q = \frac{\Delta p \rho}{8\eta L} \left(R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln(R_2/R_1)} \right)$$

Задача 4.3. Слой вязкой жидкости течет по наклонной плоскости. Найти распределение скорости и давления в слое.

$$\text{Ответ. } v = \frac{\rho g}{2\eta} \sin \alpha \cdot z(2h - z), \quad p = p_0 + \rho g \cos \alpha \cdot (h - z)$$

Задача 4.4. Из несжимаемой жидкости внезапно удаляется сферический объем радиуса a . Найти время заполнения образовавшийся полости жидкостью.

$$\text{Ответ. } \tau = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_0^a \frac{dR}{\sqrt{(a/R)^3 - 1}} = 0.915a \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}$$

Подробные решения задач 1-4 приведены в [ЛЛ 6].

Задача 4.5. Газовый шар расширяется адиабатически в вакууме. Считая, что расширение самоподобное и изэнтропийное (т.е. $p = A\rho^\gamma$, где $A = \text{const}$), определить профили давления, плотности в шаре и зависимость его радиуса от времени.

Решение. Решение этой классической задачи подробно описано во многих книгах, см., например, [Зельдович]. Предположение о самоподобности означает, что r входит в уравнения только как $\xi = r/R$. Если пометить частицу, которая в какой-то момент времени находилась, например, на $1/3$ радиуса шара R , то по мере его расширения эта частица так и останется на $1/3$ радиуса. Так как полная масса шара постоянна, профиль

плотности нужно искать в виде $\rho = \phi(\xi) / R^3$. Подставляя в уравнения непрерывности, движения, и используя $p = A\rho^\gamma$, получаем $\phi = (1 - \xi^2)^{1/(\gamma-1)}$.

5. Уравнения Брагинского

Задача 5.1. Показать, что третий момент кинетического уравнения без столкновений дает уравнение состояния.

Решение. [ВТП 4]. Умножая кинетическое уравнение на $v_i v_k$ и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{D\Pi_{ik}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Theta_{ikj} + \Pi_{ik} \frac{\partial V_j}{\partial x_j} + \Pi_{kj} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \Pi_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} - \\ - \varepsilon_{imn} \Pi_{km} B_n - \varepsilon_{kmn} \Pi_{im} B_n = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\Pi_{ik} = m \int v_i v_k f d^3 v$ - тензор плотности потока импульса, $\Theta_{ikj} = \int v_i v_k v_j f d^3 v$ - третий момент. Пренебрегая третьими моментами, и считая, что в тензоре Π_{ik} доминируют диагональные элементы, то есть $\Pi_{ik} = p\delta_{ik}$, получаем

$$\frac{Dp}{Dt} + \frac{5}{3} p \nabla \mathbf{V} = 0 \quad (5.2)$$

Выражая $\nabla \mathbf{V}$ из уравнения непрерывности, находим уравнение адиабаты с $\gamma = 5/3$

$$\frac{D}{Dt} (pn^{-5/3}) = 0 \quad (5.3)$$

как и должно быть для одноатомного газа.

Задача 5.2. На каждую частицу газа действует сила трения, пропорциональная ее скорости, $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$. Получить уравнение непрерывности для такого газа.

Решение. В кинетическом уравнении остается дополнительное слагаемое $-\int f \nabla \cdot \mathbf{F} d^3 v = 3kn$. Это слагаемое идет в правую часть уравнения – сток частиц. На первый взгляд, это может показаться странным, поскольку все привыкли к тому, что уравнение непрерывности выполняется, если частицы «не исчезают и не появляются» в объеме. Но в данном случае наличие стока связано с тем, что из-за трения частицы *могут останавливаться* в объеме. Не путать эту ситуацию с обычной силой трения между жидкостями, встречающейся в уравнениях Брагинского!

Задачи 3-6 посвящены двухточечной модели дивертора.

Задача 5.3. Найти поток тепла (Вт/м²) за счет электронной теплопроводности в плазме с градиентом температуры 1 эВ/м в точке с температурой 1 эВ.

Решение. По формулам из Брагинского $n\tau_e = 3.5 \times 10^4 T^{3/2} [eV] = 3.5 \times 10^4 \text{ с/см}^3$. Теплопроводность $\kappa_{\parallel} = 3.16 n \tau_e T [\text{erg}] / m_e = 1.77 \times 10^{20}$, соответственно поток $q = 2.83 \times 10^6 \text{ эрг/(\text{см}^2 \text{ с})} = 2830 \text{ Вт/м}^2$.

Задача 5.4. Исходя из двухточечной модели, оценить параметры водородной плазмы в диверторе токамака размера JET, $L = 50 \text{ м}$, $q_{\parallel} = 100 \text{ MW/м}^2$, $n_u = 3 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$

Решение. Воспользовавшись величиной $\kappa_0 = 2830$ из Задачи 1, находим $T_u = \left(\frac{7 q_{\parallel} L}{2 \kappa_0} \right)^{2/7} T_u = 88 \text{ эВ}$. $T_t = 2 \frac{q_{\parallel}^2 M_i}{\gamma^2 n_u^2 T_u^2} T_t = 18 \text{ эВ}$, для $\gamma = 8$, $n_t = n_u T_u / (2 T_t)$ $n_t = 7 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

Замечание: величина n_u обеспечивает $T_t < T_u$, поэтому она не может быть слишком маленькой!

Задача 5.5. В приближениях двухточечной модели найти зависимость плотности и скорости плазмы от координаты вдоль B .

Решение. Как ни странно, этот вопрос не имеет прямого ответа. Двухточечная модель не сохраняет поток частиц вдоль B . Действительно, в верхней точке $v = 0$, поэтому поток равен нулю, а на мишени дивертора поток конечный. Следовательно, предполагается наличие источника поперечного переноса вдоль линии. Причем полная сила этого источника должна быть именно такой, чтобы обеспечить нужное увеличение потока. Это условие несколько искусственно. Действительно, значение T_t определяется потоком тепла q и T_u . Задавая n_u , мы тем самым определяем и n_t из баланса давлений. Но определив n_t , мы определяем и поток на мишень. Значит, сила поперечного источника частиц зависит только от плотности n_u и температуры T_u .

Если рассматривать продольный и поперечный перенос отдельно, то нетрудно получить соответствующую модификацию двухточечной модели следующим образом.

Баланс давлений вдоль силовой линии

$$2nT + Mnv^2 = 2n_t T_t + MnC_s^2 \quad (5.4)$$

Скорость звука $C_s = \sqrt{(T_e + \gamma T_i) / M} = \sqrt{\mu T_t / M}$, обычно $\mu = 8/3$. Поток вдоль линии $\Gamma = nv$ не сохраняется из-за поперечного переноса. Его изменение определяется уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = D_{\perp} \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} \quad (5.5)$$

Считаем, что поток зависит от $x, \Gamma(x)$, и подставляем в баланс давлений (5.4), находим

$$n(x) = \frac{\pi_t}{4T} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8M\Gamma^2}{\pi_t^2} T} \right) \quad (5.6)$$

где $\pi_i = n_i T_i (\mu + 2)$ - полное давление на мишени.

Естественно, не зная $\Gamma(x)$, невозможно определить профиль $n(x)$. Рассмотрим профиль вблизи пластины, где можно считать $\Gamma = \Gamma_i = const$. Тогда выражение под корнем в (5.6) становится равно $1 - \frac{8\mu}{(2+\mu)^2} \frac{T}{T_i}$. Если $\mu = 2$, как полагается в книге

[Stangeby], то это выражение равно просто $1 - T/T_i$, то есть $T < T_i$ и температура должна убывать при удалении от мишени, что не соответствует действительности. В действительности, $\mu = 8/3$ и под корнем стоит $1 - \frac{48}{49} \frac{T}{T_i}$. То есть имеется небольшой

промежуток температуры $T_i < T < 49T_i/48$, в котором температура может возрастать от мишени. Но этот промежуток соответствует очень небольшой длине x . Так как, опять-таки в пренебрежении поперечным источником, уравнение теплопроводности дает

$$T^{7/2} = T_i^{7/2} + \frac{7qx}{2\kappa_0} \quad (5.7)$$

отсюда получаем оценку $x = 2$ см для $q = 10$ МВт/м² и $T_i = 10$ эВ.

Следовательно, даже вблизи мишени пренебрежение поперечным переносом дает противоречивый результат. Другими словами, если поперечный перенос отсутствует, то температура от мишени может только возрастать, что противоречит наблюдениям и расчетам. Это делает одномерное рассмотрение практически не применимым для нахождения профиля плотности и температуры. Двухточечная модель, таким образом, неявно предполагает наличие поперечного источника частиц, причем такой силы, чтобы обеспечить нужный их поперечный приток для обеспечения баланса давлений между верхней и нижней точками.

Задача 5.6. В реальности поперечный перенос тепла и частиц означает наличие потока через сепаратрису в SOL. Как изменятся уравнения двухточечной модели с учетом этого? Поток можно считать постоянным вдоль сепаратрисы, конвекцией пренебречь.

Решение. Уравнение для потока тепла $\nabla(\kappa \nabla T) = 0$ дает

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_{\parallel} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_{\perp} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0$. Простейшее решение можно получить, считая поперечный

вклад постоянным, $\tilde{q}_{\perp} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_{\perp} \frac{\partial T}{\partial y} \right)$, получается $T^{7/2} = T_u^{7/2} - \frac{7\tilde{q}_{\perp} x^2}{4\kappa_0}$ - то есть квадрат

вместо линейной степени координаты. Уравнение непрерывности изменяется аналогично, $nv = S_{\perp} x$. Уравнение движения остается таким же. Однако, эти источники есть только до PFR, а там всё как и было. Естественно, более полный ответ может быть получен только из решения двумерного нелинейного уравнения теплопроводности.

6. Равновесие плазмы

Задача 6.1. В Z-пинче $J = \frac{A}{(1+r^2/a^2)^2}$. Найдите $B_\theta(r)$ и $p(r)$. Ответ выразить

через полный ток пинча I . Изобразить поле и ток.

Решение. После интегрирования уравнения равновесия $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_\theta) = \frac{4\pi}{c} J$ получается

$$xB_\theta = \frac{4\pi a A}{c} \left[K - \frac{1}{2(1+x^2)} \right] \quad (6.1)$$

где $x=r/a$, K – постоянная. Так как при $x=0$ поле должно быть конечным, $K=1/2$. Значит,

$$B_\theta = \frac{2\pi A a}{c} \frac{x}{1+x^2} \quad (6.2)$$

Полный ток равен $I = \int_0^\infty 2\pi r J dr = \pi a^2 A$. Значит

$$B_\theta = \frac{2I}{ca} \frac{x}{1+x^2} \quad (6.3)$$

При больших x получается, естественно, поле от прямого тока.

Давление из уравнения равновесия $\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_\theta^2}{8\pi} \right) + \frac{B_\theta^2}{4\pi r} = 0$

$$p = \frac{2I^2}{\pi c^2 a^2} \left(\tilde{p}_0 - \frac{1}{4(1+x^2)^2} \right)$$

Задача 6.2. Найти кривизну линии винтового пинча.

Решение. Поле в пинче создается продольным током, $B_\phi = 2j\pi r/c$ и внешнем продольным полем B_z . Кривизна равна $\mathbf{k} = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{b} = -b_\phi^2 \mathbf{e}_r / r$ и направлена вдоль радиуса цилиндра к его оси. Где $b_\phi = \frac{B_\phi}{B}$. Далее, $q = \text{tg} \theta$, $b_\phi = \cos \theta$. Радиус кривизны $R = a(1+q^2)$, где $q = h/2\pi r$ - отношение шага линии к длине окружности цилиндра.

Задача 6.3. Убедиться, что функция $\frac{\psi(r,z)}{\psi_0} = \frac{1}{2} z^2 (bR^2 + r^2) + \frac{a-1}{8} (r^2 - R^2)$

является решением уравнения Грэда-Шафранова типа Соловьева. Нарисовать вид магнитных поверхностей.

Задача 6.4. Определить магнитное поле в круглом токамаке.

Решение. Общий вид магнитного поля $\mathbf{B} = F\nabla\varphi + \nabla\psi \times \nabla\varphi$. Введем систему координат $R = R_0 + \rho \cos\theta$. В принципе, $R_0(\rho)$ из-за шафрановского сдвига, а ρ определяет магнитную поверхность. Но мы сдвигом, как всегда, пренебрегаем. Для тороидального поля имеем $B_\varphi = \frac{B_0}{1 + \varepsilon \cos\theta}$, где $\varepsilon = \rho/R_0$. Так как $\nabla\psi = \mathbf{e}_\rho \psi'(\rho)$, а $\nabla\varphi = \mathbf{e}_\varphi / R$, то полоидальное поле $B_\theta = \psi'(\rho)/R$ зависит от большого радиуса точно так же, как и B_φ . Удобно выразить ψ' через параметр q , тогда $B_\theta = \frac{(\varepsilon/q)B_0}{1 + \varepsilon \cos\theta}$. Полное поле $B = B_\varphi \left(1 + (\varepsilon/q)^2\right)^{1/2}$.

Задача 6.4. Общий вид тока Пфирша-Шлюттера $J_{PS} = -\frac{cF}{B} \frac{dp}{d\psi} \left(1 - \frac{\langle 1/B_p \rangle B^2}{\langle B^2/B_p \rangle}\right)$,

где $\langle f \rangle = \oint f ds / \oint ds$ - усреднение по магнитной поверхности. Получить выражение для этого тока в круглом токамаке с малым аспектным соотношением.

Решение. Подставляем сюда результаты из задачи 3. Получаем $\langle 1/B_\theta \rangle = \frac{(q/\varepsilon)}{B_0}$,

$$\left\langle \frac{B^2}{B_p} \right\rangle = \frac{1 + (\varepsilon/q)^2}{\varepsilon/q} \frac{B_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \varepsilon \cos\theta} \approx \frac{B_0 q}{\varepsilon}, \quad F = B_0 R_0, \quad dp/d\psi = (dp/d\rho)/(RB_\theta)$$

$$J_{PS} = -\frac{2\varepsilon}{B_\theta} \frac{dp}{d\rho} \cos\theta.$$

7. Неоклассический перенос

Задача 7.1. Чему равно отношение теплопроводностей ионной и электронной теплопроводностей в плазме D?

Решение. Вдоль поля $\frac{\kappa_{\parallel}^e}{\kappa_{\parallel}^i} = \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \approx 50$, поперек $\frac{\kappa_{\perp}^e}{\kappa_{\perp}^i} = \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \approx 0.02$.

Задача 7.2. Оценить время удержания энергии в режиме бананов.

Решение. $\tau_E \sim \frac{\ell^2}{\chi_{i\perp}} \propto \ell^2 \frac{B^2 T^{1/2} \varepsilon^{3/2}}{n q^2}$ ($\chi = \kappa/n$!) Ср. с экспериментальным

скейлингом Голдстона $\tau_G \propto \frac{B^2}{nT}$.

Задача 7.3. В каком из неоклассических режимов находится плазма ITER?

Решение. В центральной горячей плазме столкновительность очень слабая, поэтому ее формально нужно отнести в режим бананов. В пристеночной плазме, наоборот, из-за сильной столкновительности применима гидродинамика, и мы оказываемся в режиме Пфирша-Шлютера. При этом, нужно помнить, что в реальности поперечный перенос аномальный, а не неоклассический, и определяется турбулентностью. Но это не отменяет наличия тока Пфирша-Шлютера в пристеночной плазме, находящейся в гидродинамическом режиме.

Колебания и волны

8. Метод Фурье

Задача 8.1. Несжимаемая вязкая жидкость соприкасается с неограниченной плоской поверхностью, совершающей в своей плоскости простое гармоническое движение с частотой ω . Найти скорость движения жидкости. [ЛЛ6]

Задача 8.2. Поток тепла на границе полубесконечной области имеет вид прямоугольного сигнала. Найти изменение температуры в области в установившемся режиме.

Решение. Разложение прямоугольного импульса с периодом T , амплитудой A и длиной τ :

$$x(t) = A \frac{\tau}{T} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\pi n \frac{\tau}{T}\right) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \quad (8.1)$$

Соответственно, поток тепла на границе области можно записать так:

$$q(t) = q_0 + (q_1 - q_0) \frac{\tau}{T} + \frac{2(q_1 - q_0)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\pi n \frac{\tau}{T}\right) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \quad (8.2)$$

где q_1, q_0 - максимальное и минимальные значения потока тепла.

Поэтому, достаточно решить задачу о распределении температуры с потоком тепла на границе

$$q(t) = Q_0 + Q_1 \cos(\omega t) \quad (8.3)$$

то есть уравнение теплопроводности $\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ с граничными условиями $T(x = \infty) = 0$ и

$q(x = 0, t) = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = q(t)$. Вычитая из температуры величину $Q_0 x / \kappa$, граничное условие сводится к $-\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1 \cos \omega t$.

Так как зависимость потока от времени содержит всего одну частоту, то и решение имеет смысл искать в виде плоской волны с той же частотой. Интуитивно

понятно, что отклонение температуры от среднего стационарного решения должно затухать. Таким образом, решение ищем в виде $f(x)\exp(-i\omega t + ikx)$. Подставляя в уравнение теплопроводности, для f получаем уравнение

$$f'' - \left(k^2 + \frac{i\omega}{\chi}\right)f + 2ikf' = 0 \quad (8.4)$$

Решение этого уравнения имеет вид $e^{\lambda x}$, где $\lambda = \pm\alpha + i(\pm\alpha - k)$, $\alpha = \sqrt{\omega/2\chi}$. Чтобы это решение убывало в глубину, выбираем знак «-». В результате, получаем решение задачи с граничным условием (8.3)

$$T(x,t) = -\frac{Q_0 x}{\kappa} + \frac{Q_1}{\kappa} \sqrt{\frac{\chi}{\omega}} \exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4} - x\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\right) \quad (8.5)$$

Выбирая $Q_{0,1}$ в соответствии с разложением (8.2), элементарно написать окончательный ответ.

Отметим, что найденное решение дает только установившиеся колебания температуры вокруг равновесного значения. Полное решение зависит также от начальных условий и содержит еще переходную часть [Carslow]. «Полубесконечность» нужно понимать так: за период колебаний T из (8.1) изменение температуры успевают распространиться на глубину порядка $\sqrt{\chi T}$, которая должна быть много меньше толщины пластины.

9. МГД волны

Задача 9.1. Оценить скорость Альфвена и скорость звука для гелиевой плазмы с температурой 10 эВ и плотностью 10^{12} см⁻³. Магнитное поле 1 Тл.

Решение. $v_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}} = 10^9$ см/с. $v_s = \sqrt{\frac{\gamma T}{m_{He}}} = \sqrt{\frac{5 T}{3 m}} = 2 \cdot 10^6$ см/с. Заметим, что

отношение этих скоростей $\beta \sim \frac{v_s^2}{v_A^2} = 4 \cdot 10^{-6}$.

Задача 9.2. Для жидкости с законом Ома $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}$, находящейся в однородном магнитном поле, найти дисперсионное соотношение для альфвеновской волны.

Решение. Повторяет рассмотрение МГД колебаний [ЛЛ8] за исключением уравнения для магнитного поля, в которое добавляется слагаемое, определяемое проводимостью:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2 \eta}{4\pi} \Delta \mathbf{B} \quad (9.1)$$

Соответственно, в уравнение для линейной поправки

$$-i\omega\mathbf{B}_1 = i\mathbf{k} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) - k^2\mathbf{B}_1 \frac{c^2\eta}{4\pi} \quad (9.2)$$

Для альфвеновской волны нужны два уравнения для поправок:

$$\begin{aligned} -(\omega + i\gamma)B_{1z} &= v_z k B_{0x} \\ \frac{\omega}{k} v_z &= -\frac{B_{0x} B_{1z}}{4\pi\rho} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Здесь $\gamma = \frac{c^2\eta}{4\pi} k^2$, а ось x выбрана вдоль вектора \mathbf{k} . Условие совместимости этих двух уравнений приводит к дисперсионному уравнению

$$\omega^2 \left(1 + \frac{i\gamma}{\omega}\right) - k^2 V_a^2 = 0 \quad (9.4)$$

Как обычно, скорость Альфвена $V_a = B_0 / \sqrt{4\pi\rho}$.

В принципе, решение этого уравнения можно искать с комплексными k и ω . Если считать, что в начальный момент времени волна была монохроматической $\sim \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, то \mathbf{k} должно оставаться действительным и только частота комплексная. Действительная часть частоты

$$\text{Re } \omega = \sqrt{k^2 V_a^2 - \gamma^2 / 4} \quad (9.5)$$

Мнимая часть дает коэффициент затухания $\exp(t|\text{Im } \omega|)$:

$$\text{Im } \omega = -\frac{\gamma}{2} = -\frac{1}{2} k^2 \frac{c^2\eta}{4\pi} \quad (9.6)$$

10. Диэлектрическая проницаемость без МП

Задача 10.1. В выражении для диэлектрической проницаемости фигурирует функция [ЛЛ 10]

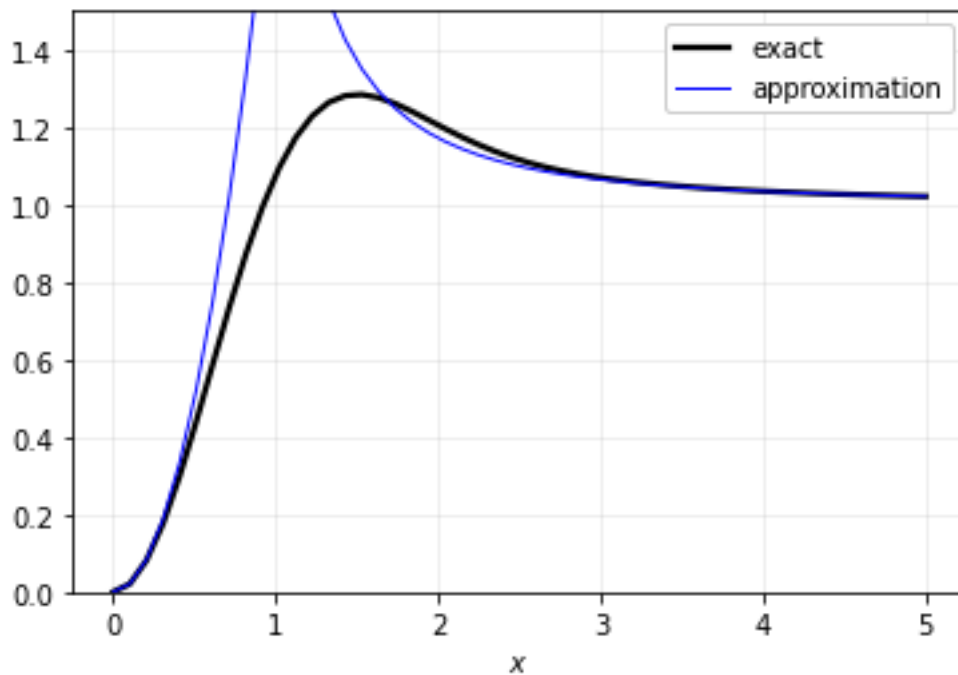
$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-t^2) dt}{x-t} \quad (10.1)$$

Для этой функции известны две асимптотики

$$\begin{aligned}
 F(x \ll 1) &= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 - \dots \\
 F(x \gg 1) &= \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^3} + \frac{3}{8x^5} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{10.2}$$

Построить функцию F и ее асимптотики, оценить точность приближения.

Решение. Вместо численного вычисления интеграла в (10.1) можно воспользоваться выражением F через функцию Фаддеевой $F = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{Im}W(x)$, которая запрограммирована в большинстве библиотек по численным методам.



Из рисунка видно, что точность асимптотических выражений очень хорошая, за исключением области вблизи максимума. Поэтому в большинстве задач, можно использовать асимптотики (10.2) и не заниматься численным вычислением интеграла (10.1)

Задача 10.2. Найти диэлектрическую проницаемость ГД приближении в плазме без магнитного поля в предположении 1) изотермический случай; 2) адиабатический случай.

Решение. Уравнения для жидкости

$$mn \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + en\mathbf{E}
 \tag{10.3}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{v}) = 0
 \tag{10.4}$$

Слагаемое с магнитным полем не пишем, так как оно при лианеризации выпадает. Заряд $e > 0$. В изотермическом случае $T = \text{const}$, в адиабатическом добавляется уравнение адиабаты

$$\frac{d}{dt}(pn^{-\gamma}) = 0 \quad (10.5)$$

1) Изотермический случай. Лианеризуем и переходим к Фурье, находим: $n_1 = n_0 \mathbf{k}\mathbf{v} / \omega$, $-i\omega m \mathbf{v} = -i T \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v}) / \omega + e \mathbf{E}$. Направим k по оси x . Тогда для компонент тока

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{v} \quad \text{получается} \quad j_x = \frac{e^2 n_0 E_x}{ik^2 T / \omega - im\omega}, \quad j_{yz} = -\frac{n_0 e^2 E_{yz}}{mi\omega}.$$

Отсюда выражение для проницаемости $\hat{\varepsilon} = \hat{\delta} + \frac{4\pi i}{\omega} \hat{\sigma}$ имеет продольную компоненту ε_{xx} и две поперечные:

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \sum_e \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - k^2 T / m} \quad (10.6)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 1 - \sum_e \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \quad (10.7)$$

В случае малой частоты (или большой температуры плазмы) оба выражения совпадают с действительными частями проницаемости из кинетики. Заметим, что в ГД проницаемость не имеет комплексной части.

2) Адиабатический случай. Имеем $\frac{dp_1}{dt} = -\gamma p_0 \nabla \mathbf{v}$, $p_1 = \gamma p_0 \mathbf{k}\mathbf{v} / \omega$. Подставляя в уравнение движения видим, что отличие от изотермического случая состоит только в множителе γ . Поэтому поперечная проницаемость такая же, а продольная

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \sum_e \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \gamma k^2 T / m} \quad (10.8)$$

См. [ВТП 3], формулы (2.9) и (2.8).

Задача 10.3. Без магнитного поля тензор диэлектрической проницаемости может быть представлен в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\perp} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} \right) + \varepsilon_{\parallel} \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} \quad (10.9)$$

Выразить $\varepsilon_{\perp}, \varepsilon_{\parallel}$ через $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

Решение. $\varepsilon_{\alpha\beta} k_{\alpha} k_{\beta} = \varepsilon_{\parallel} k^2$; $\varepsilon_{\alpha\alpha} = 2\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}$, $\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon_{\alpha\beta} \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} \right)$

Задача 10.4. Получить явное выражение для тензора диэлектрической проницаемости вида (10.9) в гидродинамическом приближении.

Решение. Рассмотрим, например, изотермический случай. Для тока имеем уравнение

$$\mathbf{j} = \kappa(\kappa\mathbf{j}) + \mathbf{J} \quad (10.10)$$

где $\kappa = \mathbf{k} / v_T \omega$, $v_T = \sqrt{T/m}$, $\Omega = \sqrt{4\pi n e^2 / m}$, $\mathbf{J} = i\Omega^2 / (4\pi\omega) \mathbf{E}$. Умножая уравнение (10.10) скалярно на κ , получаем $\kappa\mathbf{j} = \kappa\mathbf{J} / (1 - \kappa^2)$, подставляя назад в (10.10), сразу находим

$$\mathbf{j} = \mathbf{J} + \frac{\kappa(\kappa\mathbf{J})}{1 - \kappa^2}$$

Следовательно, $\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) - \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta}{1 - \kappa^2} \frac{\Omega^2}{\omega^2}$. Это соответствует $\varepsilon_{\perp} = 1 - \Omega^2 / \omega^2$,

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\Omega^2 / \omega^2}{1 - \kappa^2}.$$

11. Дисперсия без МП

Задача 11.1. Получить дисперсионное соотношение для продольных и поперечных волн в ГД приближении не используя диэлектрическую проницаемость.

Решение. 1) *Большие частоты.* Колеблются только электроны. Уравнения для колебаний:

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + \nabla(n_e \mathbf{v}) = 0 \quad (11.1)$$

$$m n_e \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p_e - e n_e \mathbf{E} \quad (11.2)$$

$$\nabla \mathbf{E} = -4\pi e n_{e1} \quad (11.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (11.4)$$

Возмущение для давления $p_e = \gamma T n_{e1}$. Продольная волна: \mathbf{E} направлено вдоль \mathbf{k} , тогда $n_{e1} = n_{e0} k v / \omega$, скорость и ток $\mathbf{j} = -e n_e \mathbf{v}$, направлены вдоль \mathbf{k} , значит поля \mathbf{B} нет. Дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m} + \frac{k^2 \gamma T}{m} \quad (11.5)$$

Эта волна (Ленгмюровская) электростатическая, в ней $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$.

В поперечной волне $\nabla\mathbf{E} = 0$, поэтому возмущения плотности нет, т.е. несжимаемое колебание. В такой волне $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, из уравнения движения находим в общем виде $\mathbf{v} = e\mathbf{A}/mc$. Подставляя в уравнение Максвелла $-\Delta\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$, сразу находим дисперсионное соотношение: $\omega^2 = k^2 c^2 + \Omega_e^2$.

2) *Малые частоты.* Колеблются и ионы, и электроны, продольная волна электростатическая. Электроны успевают прийти к равновесию Больцмана, которое получается пренебрежением инерцией в уравнении движения, $n_{e1} = n_{e0} \exp(e\varphi_1/T_e)$. Тогда $\mathbf{kE} = 4\pi e(n_{i1} - n_{e1})$. Собираю все вместе, получаем дисперсионное уравнение

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{T_e/M}{1+k^2 r_D^2} + \gamma_i \frac{T_i}{M} \quad (11.6)$$

где $r_D = \sqrt{T_e/4\pi n e^2}$ - электронный радиус Дебая. При малых \mathbf{k} получается собственно ионный звук $C_s = \sqrt{(T_e + \gamma_i T_i)/M}$. При больших \mathbf{k} $\omega = \Omega_i$.

Задача 11.2. Исходя из тензора ε в ГД приближении, получить дисперсионное соотношение для ленгмюровских и ионно-звуковых волн

Решение. Имеем

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e \omega^2 - \gamma_e k^2 T_e} - \frac{4\pi e^2 n_i}{m_i \omega^2 - \gamma_i k^2 T_i} \quad (11.7)$$

Для высокой частоты получаем ленгмюровские колебания

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \gamma_e \frac{k^2 T_e}{m_e} \quad (11.8)$$

Чтобы получить ионные колебания, опускаем член с m_e . Это соответствует пренебрежению инерцией электронов. В результате получаем

$$\omega^2 = \gamma_i \frac{k^2 T_i}{m_i} + \gamma_e \frac{k^2 z T_e}{m_i (1 + k^2 \gamma_e \lambda_e^2)} \quad (11.9)$$

где $\lambda_e^2 = T_e / (4\pi e^2 n_e)$ - электронный радиус Дебая.

Для длинных волн ($k \rightarrow 0$) получается «ионный звук»

$$\omega^2 = k^2 \frac{\gamma_i T_i + \gamma_e z T_e}{m_i} \quad (11.10)$$

Задача 11.3. Рассмотреть распространение ленгмюровской волны в плазме с учетом трения электронов об ионы.

Решение. Уравнение движения для электронов

$$mn \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p_e - en\mathbf{E} - \frac{mn}{\tau} \mathbf{v} \quad (11.11)$$

Делая все как и раньше (задача 1), приходим к дисперсионному соотношению $\omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} = \frac{\gamma k^2 T}{m} + \frac{4\pi e^2 n}{m}$. Или $\omega = \frac{-i}{2\tau} \pm \sqrt{\omega_*^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$. То есть волна затухает как $\exp(-t/2\tau)$

Задача 11.4. Рассмотреть распространение поперечной волны высокой частоты с учетом трения электронов об ионы.

Решение. Поступая как раньше (задача 1), но с добавлением в уравнение движения для электронов слагаемого $-mnv/\tau$, находим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \frac{\Omega_e^2}{1+i/\tau\omega} \quad \text{или} \quad \omega^2 + \frac{i\omega}{\tau} = c^2 k^2 \left(1 + \frac{i}{\tau\omega}\right) + \Omega_e^2. \quad \text{Если } \omega \gg ck, \text{ это уравнение}$$

получается такое же, как в предыдущей задаче 3 для ленгмюровской волны. То есть волна затухает с декрементом затухания $1/2\tau$.

Задача 11.5. На границу плазма-вакуум из вакуума падает плоская монохроматическая электромагнитная волна. Волновой вектор волны перпендикулярен границе. Найти коэффициент отражения волны.

Решение. Поле исходной волны $E_x = E_{0x} e^{i(k_0 z - \omega t)}$, $B_y = -\frac{ck_0}{\omega} E_x$. При отражении

образуется еще одна волна с волновым вектором $k_1 = -k_0$, а во внутрь плазмы проникает волна с волновым вектором k_2 . Частоты всех волн одинаковы. Дисперсионное уравнение определяет соотношение между волновым вектором и частотой в обеих средах, а так как частота фиксирована – то соотношение между волновыми векторами. Удобно, для сокращения выкладок, ввести диэлектрическую проницаемость, тогда $k_2 c / \omega = \sqrt{\varepsilon}$,

$k_0 c / \omega = 1$, в простейшем приближении $\varepsilon = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2}$. Эти формулы сразу определяют

волновые вектора. Соотношение амплитуд волн дается граничными условиями, которые означают непрерывность суммарных компонент E_x и B_y на границе: $E_0 + E_1 = E_2$ и

$$E_1(k_0 + k_2) = (k_0 - k_2) E_0. \quad \text{Отсюда находим } E_1 = \frac{k_0 - k_2}{k_0 + k_2} E_0 \quad \text{или} \quad E_1 = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}} E_0.$$

Коэффициент отражения равен отношению энергии отраженной и падающих волн, которая пропорциональна $R = |E_1|^2 / |E_0|^2$. Обозначив $\sqrt{\varepsilon} = n + i\chi$, находим

$$R = \frac{(1-n)^2 + \chi^2}{(1+n)^2 + \chi^2}. \quad \text{Если } \omega > \Omega_e, \text{ то волна частично проникает в плазму, а часть энергии}$$

отражается. Если же $\omega < \Omega_e$, то получаем $R=1$, то есть вся энергия волны отражается. В этом состоит явление отсечки. Отметим, что приведенные формулы являются частным случаем известных формул Френеля распространения волн на границе двух сред [ЛЛ8].

12. Волны в замагниченной плазме

Задача 12.1. Найти выделение тепла Q при распространении волны в замагниченной плазме в приближении холодной плазмы, за счет комплексной части диэлектрической проницаемости.

Решение. По известной формуле из [ЛЛ 8],

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\omega}{4\pi} E_\alpha^* E_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}'' \quad (12.1)$$

где $i\varepsilon_{\alpha\beta}'' = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\beta\alpha}^*}{2}$ - антиэрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости.

Чтобы получить (12.1), заметим, что искомое выделение тепла определяется дивергенцией плотности потока энергии (вектор Пойнтинга):

$Q = -\frac{c}{4\pi} \nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}})$, где использованы уравнения Максвелла с учетом того, что ток сторонних зарядов равен 0. Это выражение нужно усреднить по периоду колебаний. Для этого запишем $\mathbf{E} = \mathbf{E} e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^* e^{i\omega t}$ и аналогично для остальных векторов. Так как плазма – не магнитоактивная среда, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, и при усреднении слагаемое с магнитным полем зануляется. При усреднении первого слагаемого остаются только перекрестные слагаемые, содержащие один раз сопряжённую величину: $Q = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \dot{\mathbf{D}}^* + \mathbf{E}^* \dot{\mathbf{D}})$.

Подставляя сюда $D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta$, получается (12.1).

В приближении холодной плазмы тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ симметричен, так что его антиэрмитова часть равна нулю, и $Q=0$, чего и следовало ожидать. Этот результат напоминает, что наличие мнимых слагаемых в диэлектрической проницаемости еще не означает, что энергия волны будет поглощаться, так как в выражение для выделения энергии (12.1) входит именно антиэрмитова часть тензора, а не просто мнимая часть ε ! (Ср. с затуханием Ландау в незамагниченной плазме.)

Задача 12.2. Оценить частоту верхнегибридного резонанса $\omega_{UH} = \sqrt{\omega_e^2 + \Omega_e^2}$ для плазмы с параметрами $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $T = 10 \text{ кэВ}$, $B = 5 \text{ Тл}$.

Решение. $\omega_e = 8.8 \times 10^{11} \text{ с}^{-1}$, $\Omega_e^2 = 3 \times 10^{23}$ так что циклотронная частота только немного больше плазменной. Частота резонанса 10^{12} с^{-1} .

Задача 12.3. Оценить частоту нижнегибридного резонанса $\omega_{LH} = \frac{\Omega_i}{\sqrt{1 + \Omega_e^2 / \omega_e^2}}$ для дейтериевой плазмы с параметрами $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $T = 10 \text{ кэВ}$, $B = 5 \text{ Тл}$.

Решение. $\omega_e = 8.8 \times 10^{11} \text{ с}^{-1}$, $\Omega_e^2 = 3 \times 10^{23}$ так что циклотронная частота только немного больше плазменной. В результате частота получается порядка плазменной частоты ионов $\Omega_i = 2 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$.

13. Излучение

Задача 13.1. Плазма олова Sn с плотностью 10^{14} см^{-3} , температура 1 эВ. Оценить длину пробега фотона в линии 452 нм, учитывая только эффект Доплера. Коэффициент Эйнштейна $A = 2.6 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$

Решение. $\kappa = n_0 B_{01} \psi(\omega_0) \frac{\hbar \omega_0}{4\pi} = n_0 \frac{1}{8\pi} \frac{g_i}{g_0} \frac{\lambda^3 A}{v_0}$. Скорость олова $v_0 = 1.3 \cdot 10^5 \text{ см/с}$.

Поэтому $\kappa = 74 \text{ см}^{-1}$.

Задача 13.2. Для плазмы He оценить степень ионизации в полном равновесии для плотности 10^{19} см^{-3} и температуры 5 эВ. Потенциал ионизации 24.6 эВ.

Решение. Формула Саха $K \equiv \frac{n_{He^+} n_e}{n_{He}} = \frac{2g_i}{g_a} 3 \cdot 10^{21} T^{3/2} \exp\left(-\frac{I}{T}\right) = 5 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$.

Степень ионизации $\alpha = n_{He^+} / (n_{He^+} + n_{He})$ находится из уравнения $\alpha^2 \frac{n}{K} + \alpha - 1 = 0$. Так как

$n/K \ll 1$, то решение этого уравнения $\alpha = 1 - \frac{n}{2K} = 1 - 10^{-2} = 0.99$, то есть все

ионизовано, хотя температура T много меньше потенциала ионизации. Заметим, что при меньших n степень ионизации формально становится еще меньше, но нужно помнить, что сама формула Саха применима только для достаточно больших n , при которых выполняется условие ЛТР.

Задача 13.3. Получить выражение для Доплеровского контура линии.

Решение. Эффект Доплера приводит к изменению частоты $\omega = \omega_0 (1 + v_x / c)$.

Скорость распределена по Максвеллу $f(v_x) = A \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2T}\right)$. Профиль линии связан с

этим распределением соотношением $\psi(\omega) d\omega = f(v_x) dv_x$. Подставляя сюда зависимость

$\omega(v_x)$, находим $\psi = \frac{Ac}{\omega_0} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\gamma^2}\right)$ где $\gamma = \frac{2T\omega_0^2}{mc^2}$. Константа A находится из

условия нормировки.

Задача 13.4. Профиль линии имеет лоренцовскую форму $\psi = \frac{\gamma / \pi}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}$. Но

спектрометр измеряет зависимость от длины волны λ , а не от частоты. Найти форму профиля $\psi_\lambda(\lambda)$ вблизи центра линии.

Решение. Имеем $\psi d\omega = \psi_\lambda d\lambda$. Подставляя сюда $\lambda = 2\pi c / \omega$, получаем $\psi(\lambda) = \frac{2c\gamma\lambda_0^2}{4\pi^2 c^2 (\lambda - \lambda_0)^2 + \gamma^2 \lambda^2 \lambda_0^2}$, где $\lambda_0 = 2\pi c / \omega_0$. Вблизи центра линии во втором слагаемом в знаменателе можно считать $\lambda \approx \lambda_0$. В этом случае контур остается лоренцовским: $\psi_\lambda = \frac{\gamma\lambda_0^2}{2\pi^2 c (\lambda - \lambda_0)^2 + \Gamma^2}$, где ширина $\Gamma = \gamma\lambda_0^2 / (2\pi c)$.

Задача 13.5. Найти форму профиля линии $I(\omega)$ для затухающей волны $e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t)$. **Решение.** Фурье преобразование

$$I = \text{Re} \int \exp(-i\omega_0 t - \gamma t + i\omega t) dt = \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \text{ Так что получается контур Лоренца.}$$

14. Дрейфовые волны

Задача 14.1. Получить уравнение для дрейфовой волны, полностью пренебрегая инерцией ионов.

Решение. В этом приближении скорости как ионов, так и электронов поперек поля \mathbf{V} определяется дрейфом: в скрещенных полях

$$\mathbf{V} = -\frac{c}{B} (\nabla \varphi \times \mathbf{e}_z) \quad (14.1)$$

Подставляя эту скорость в уравнение непрерывности, с учетом того, что $\nabla \mathbf{V} = 0$, получаем

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla n = 0 \quad (14.2)$$

Возмущение электронной плотности следует распределению Больцмана, поэтому $n_1 = ne\varphi / T_e$. Переходя к возмущенной плотности в (14.2), находим для нее

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + u_d \frac{\partial n_1}{\partial y} = 0 \quad (14.3)$$

где дрейфовая скорость $u_d = -cT_e / (eB) d \ln n / dx$. Это уравнение и описывает распространение дрейфовой волны вдоль оси y со скоростью u_d .

Задача 14.2. Решить ДУ (найти собственные функции и собственные значения)

для неустойчивости Рэлея-Тейлора $\frac{1}{\rho_0}(\psi'\rho_0)' - k^2\psi + \frac{k^2 g_y}{\omega^2} \frac{\rho_0'}{\rho_0} \psi = 0$ для экспоненциальной зависимости плотности от y . Граничные условия $\psi(0) = \psi(h) = 0$.

Решение. Если $\rho_0 \sim \exp(y/s)$, решение имеет вид $\psi = \sin\left(\frac{\pi n y}{h}\right) \exp\left(-\frac{y}{2s}\right)$.

При этом собственные значения находятся из уравнения $k^2 \left(1 - \frac{g}{s\omega^2}\right) = -\frac{1}{4s^2} - \frac{n^2\pi^2}{h^2}$.

Задача 14.3. Дрейфовая волна возбуждается случайной флуктуацией потенциала, имеющей гауссову форму. Найти автокорреляционную функцию $\langle \varphi_{\mathbf{k}}(t) \varphi_{\mathbf{k}}(t') \rangle$ получившихся колебаний потенциала. Усреднение производится «по статистическому ансамблю», то есть фактически по положению начальной точки возбуждения.

Решение. Уравнение, определяющее фурье-компоненту потенциала в дрейфовой волне

$$\frac{d\varphi_{\mathbf{k}}}{dt} + i\omega_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}} = 0 \quad (14.4)$$

где $\omega_{\mathbf{k}}$ - дрейфовая частота, зависящая от волнового вектора \mathbf{k} . Решение этого уравнения

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}}^0 \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t) \quad (14.5)$$

представляет собой колебание, определяемое начальным значением фурье-компоненты $\varphi_{\mathbf{k}}^0$. Последняя находится из разложения потенциала при $t = 0$:

$$\varphi^0(\mathbf{r}) = \int \varphi_{\mathbf{k}}^0 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k \quad (14.6)$$

или

$$\varphi_{\mathbf{k}}^0 = \int \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3r \quad (14.7)$$

Подставляя сюда $\varphi(\mathbf{r}) = A \exp\left(-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 / R^2\right)$, где \mathbf{r}_0 - случайно выбранная начальная точка, находим

$$\varphi_{\mathbf{k}}^0 = e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0} A (\sqrt{\pi})^3 R^3 \exp\left(-\frac{3k^2 R^2}{4}\right) \quad (14.8)$$

Заметим, что $\varphi_{\mathbf{k}}^{0*} = \varphi_{-\mathbf{k}}^0$, что обеспечивает действительность разложения $\varphi^0(\mathbf{r})$. Таким образом, коэффициенты $\varphi_{\mathbf{k}}^0$ имеют случайную фазу $\mathbf{k}\mathbf{r}_0$ и постоянную амплитуду, если, конечно, ширина и высота возмущения постоянны.

Подставляя коэффициенты разложения (14.8) в ответ (14.5), получаем полное решение задачи о колебаниях. Коррелятор равен:

$$\langle \varphi_{\mathbf{k}}(t) \varphi_{\mathbf{k}'}(t') \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') |\varphi_{\mathbf{k}}^0|^2 \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}[t - t']) \quad (14.9)$$

с учетом того, то $\langle \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0) \exp(-i\mathbf{k}'\mathbf{r}_0) \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ при усреднении по \mathbf{r}_0 .

Задача 14.4. Рассмотреть распространение дрейфовой волны в плазме с примесью нейтральной компоненты.

Решение. Объемная плотность силы трения, действующей со стороны атомов на ионы, равна

$$\mathbf{R} = n_i n_a \mu_{ia} K (\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_i) \quad (14.10)$$

где $K = \langle \sigma v \rangle$ - «скорость реакции» столкновения, μ_{ia} - приведенная масса [Брагинский, ВТП 1]. Уравнение для скорости ионов, пренебрегая инерцией

$$e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \right) - (\mathbf{V} - \mathbf{V}_a) \mu \nu_{ai} = 0$$

Отсюда находим скорость ионов

$$\mathbf{V}_{\perp} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} + \alpha \frac{c\mathbf{E}}{B} + \alpha^2 \mathbf{V}_a + \alpha \frac{\mathbf{V}_a \times \mathbf{B}}{B}$$

где $\alpha = \mu \nu_{ai} c / (eB) \ll 1$ (малость учтена в множителе скоростью, но мы оставили все слагаемые, пропорциональные скорости нейтралов).

Подставляем это в линеаризованное уравнение непрерывности для ионов

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla n_0 = 0$$

где считаем $\nabla \mathbf{V} = 0$ так как $\mathbf{V}_a = const$. Учитывая, что $n_1 = n_0 e \varphi_1 / T_e$, находим уравнение для потенциала

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \omega_* \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \omega_* \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \omega_* \frac{\alpha B}{c} (V_{ay} - \alpha V_{ax}) = 0$$

где $\omega_* = \frac{c T_e}{e B} \frac{d \ln n_0}{dx}$ - дрейфовая частота.

15. Энергетический принцип

Задача 15.1. Рассмотрим уравнение $y'' + y'/x + \lambda y = 0$ с граничными условиями $y(1) = 0$, $y'(0) = 0$. Сформулировать вариационный принцип для этой задачи и оценить собственное значение, используя пробную функцию $y = (1 - x^2)^n$.

Решение. Домножая на x , приводим уравнение к обычному виду

$$(xy')' + \lambda xy = 0 \quad (15.1)$$

Домножаем на y , интегрируя по частям, находим

$$\lambda = \frac{\int_0^1 xy'^2 dx}{\int_0^1 xy^2 dx} \quad (15.2)$$

Подставляем сюда пробную функцию, получаем

$$\lambda(n) = \frac{n(2n+1)}{2n-1} \quad (15.3)$$

($n > 0$). Это выражение имеет минимум для $n^* = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Соответствующее собственное значение $\lambda^* \approx 5.828$.

Исходное уравнение – это уравнение Бесселя, его решение $y = J_0(x\sqrt{\lambda})$. Точное решение определяется нулем этой функции и равно $\lambda \approx 5.783$, что довольно близко к найденному приближенному решению.

Задача 15.2. Рассмотрим уравнение $y'' + (\lambda - x^2)y = 0$ с граничными условиями $y'(0) = 0$, $y'(1) = 3y(1)$. Получить вариационный принцип, в котором граничные условия включены в «естественном» виде. Используя пробную функцию $y = 1 - \beta x^2$, оценить λ и сравнить с точным решением.

Решение. Домножаем на y , интегрируем по частям:

$y y'' \Big|_0^1 + \int_0^1 (-y'^2 + y^2(\lambda - x^2)) dx = 0$. В граничном условии оставляем только y , без производной: $3y(1)^2 + \int_0^1 (-y'^2 + y^2(\lambda - x^2)) dx = 0$, откуда:

$$\lambda = \frac{-3y(1)^2 + \int_0^1 (y'^2 + x^2 y^2) dx}{\int_0^1 y^2 dx} \quad (15.4)$$

Пробная функция удовлетворяет граничным условиям, если $\beta = 3$. Подставляя в вариационный принцип (15.4), находим $\lambda = 11/21 \approx 0.5238$. Это значение очень далеко от точных собственных значений.

Будем теперь считать β свободным параметром. Вычисление интегралов дает

$$\lambda(\beta) = \frac{4(-40\beta^2 + 147\beta - 70)}{7(3\beta^2 - 10\beta + 15)} \quad (15.5)$$

Эта функция имеет экстремумы при $\beta_1 \approx 1.766$ и $\beta_2 \approx -20.803$, которым соответствуют собственные значения $\lambda_1 \approx 5.534$ и $\lambda \approx -7.677$.

Точные собственные значения $\lambda^* \approx -8.378; 4.999$. Видно что второй способ дает более разумное приближение: хотя исходная пробная функция не удовлетворяет второму граничному условию, вариационный принцип, записанный в виде (15.4), минимизирует это отличие, приводя к более точной оценке собственного значения.

Задача 15.3. Уравнение для потенциала скорости для неустойчивости Релея-Тейлора в плоском слое имеет вид $\frac{1}{\rho_0}(\psi'\rho_0)' - k^2\psi + \frac{k^2 g_y}{\omega^2} \frac{\rho_0'}{\rho_0} \psi = 0$ (задача 2 раздела 14) с граничными условиями $\psi(0) = \psi(h) = 0$. Исследовать устойчивость решений с помощью вариационного метода.

Решение. Умножаем на $\psi(y)$, интегрируем по частям:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{\int_0^h \rho_0 (k^2 \psi^2 + \psi'^2) dy}{\int_0^h g_y \rho_0' \psi^2 k^2 dy} \quad (15.6)$$

Отсюда видно, что если $g_y \rho_0' > 0$, $\omega^2 > 0$ и решение устойчиво.

Задача 15.4. Проанализировать устойчивость Θ -пинча, исходя из энергетического принципа, учитывая только вклад плазмы. Интеграл энергии:

$$W_{Plasma} = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{|\vec{Q}_\perp|^2}{4\pi} + \frac{B^2}{4\pi} |\nabla \vec{\xi}_\perp + 2\vec{\xi}_\perp \vec{k}|^2 + \gamma p |\nabla \vec{\xi}|^2 \right. \\ \left. - 2(\vec{\xi}_\perp \cdot \nabla p)(\vec{\xi}_\perp^* \vec{k}) - J_\parallel \vec{Q}_\perp (\vec{\xi}_\perp^* \times \vec{b}) \right\} d^3 r$$

- 1) При каком условии можно считать возмущения несжимаемыми? Минимизировать слагаемое с несжимаемостью.
- 2) Записать интеграл энергии как функционал от ξ в явном виде.
- 3) Провести алгебраическую минимизацию по ξ . Получившийся интеграл должен содержать только ξ_r .

4) Что можно сказать об устойчивости пинча, исходя из полученного интеграла? При каких условиях оправдано предположение о несжимаемости?

Решение. Условие несжимаемости можно удовлетворить если $k \neq 0$:

$\xi_z = \frac{i}{kr} [(r\xi_r)' + m\xi_\theta]$. Кривизна и ток равны 0. Остаются только неотрицательные слагаемые.

$$\mathbf{Q}_\perp = ikB_z (\xi_r \mathbf{e}_r + \xi_\theta \mathbf{e}_\theta) \quad (15.7)$$

$$\nabla \xi_\perp = \frac{1}{r} (r\xi_r)' + \frac{im}{r} \xi_\theta \quad (15.8)$$

Подставляя в интеграл энергии, находим

$$W(r) = B_z^2 \left[k^2 (|\xi_r|^2 + |\xi_\theta|^2) + \frac{1}{r^2} |(r\xi_r)'|^2 + \frac{m^2}{r^2} |\xi_\theta|^2 + \frac{im}{r^2} \xi_\theta (r\xi_r^*)' - \frac{im}{r^2} \xi^*{}_\theta (r\xi_r)' \right] \quad (15.9)$$

Сам интеграл равен $\int_0^a rWdr$. Выделяя полный квадрат, получаем

$$W(r) = B_z^2 \left[\left| k_0 \xi_\theta - \frac{im}{k_0 r^2} (r\xi_r)' \right|^2 + \frac{k^2}{k_0^2 r^2} \left(|(r\xi_r)'|^2 + k_0^2 r^2 |\xi_\theta|^2 \right) \right] \quad (15.10)$$

где $k_0^2 = k^2 + m^2 / r^2$. Отсюда находим ξ_θ , которое должно занулить первый модуль. Получающийся интеграл всегда положителен. Если $k^2 \rightarrow 0$, $W(r) \rightarrow 0$, что оправдывает предположение о несжимаемости.

Задача 15.4. Условие устойчивости Z-пинча для несжимаемой моды с $m = 0$:

$$\frac{-rp'}{p} < \frac{2\gamma B_\theta^2 / \mu_0}{\gamma p + B_\theta^2 / \mu_0} \quad (15.11)$$

γ – показатель адиабаты. Профили Бене для равновесия

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{r}{r^2 + r_0^2}$$

$$p = \frac{\mu_0 I_0^2}{8\pi^2} \frac{r_0^2}{(r^2 + r_0^2)^2} \quad (15.12)$$

При каких γ можно удовлетворить критерий устойчивости?

Ответ: $\gamma > 2$, что не реально, так как в идеальной МГД $\gamma = 5/3$.

Литература

[ЛЛ X] Ландау и Лифшиц, Курс теоретической физики, Том X

[ВТП X] Вопросы теории плазмы, Том X

[Stangeby] Книга The Plasma Boundary of Magnetic Fusion Devices

[Зельдович] Книга «Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений»

[Carslow] Карслоу, Егер. Теплопроводность твердых тел.

[Freidberg]. Freidberg. Ideal magnetohydrodynamics.