

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ МИФИ**

ИВАНОВ В.А.

**ДИНАМИКА ПЛАЗМЫ
В СИЛЬНЫХ СВЧ ПОЛЯХ**

Введение в курс

Москва, 2019

УДК 533.9; 537.5

PACS 52.30.-q; 52.38.Kd; 52.40.Fd-Hf; 52.50.Sw

ББК 22.333

Д44

Иванов В.А. ДИНАМИКА ПЛАЗМЫ В СИЛЬНЫХ СВЧ ПОЛЯХ. Введение в курс. М.: НИЯУ МИФИ, 2019 г. – 377 с.

Иванов Вячеслав Алексеевич, к.ф.-м.н., доцент НИЯУ МИФИ, зав. отделом ИОФ РАН

Рецензент Батанов Герман Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, гл.н.с. ИОФ РАН

Книга написана на основе курса лекций, читавшихся в течение ряда лет в Национальном Исследовательском Ядерном Университете МИФИ (НИЯУ МИФИ). Цель книги состоит в том, чтобы ввести студентов и аспирантов физических специальностей в важный раздел физики взаимодействия сильных электромагнитных волн сверхвысокочастотного (СВЧ) диапазона с заряженными частицами и плазмой. В сильных СВЧ полях электроны набирают энергию, достаточную для ионизации газов и возбуждения конденсированных сред. Взаимодействие сильных СВЧ волн с плазмой раскрывает важнейшие свойства плазмы как особого состояния вещества, существенно отличающегося по свойствам от газообразных и конденсированных сред.

Теоретической базой книги являются электродинамика и классическая механика, опирающаяся на уравнения движения заряженных частиц в силовых полях, возникающих в сильных однородных и неоднородных электромагнитных волнах. Приведены примеры расчетов характеристик движения заряженных частиц как в полях СВЧ волны, так и в поле лазерного излучения, которые подчиняются единым законам физики. В основе курса лежит также опыт экспериментальной и расчетной работы автора в ФИАН и ИОФ РАН, связанный с исследованием взаимодействия сильных СВЧ волн с плазмой, газом и конденсированными средами. Освоение книги позволит читателям самостоятельно изучать более сложные научные материалы по электродинамике и кинетике плазмы, а также войти в тематику взаимодействия СВЧ и лазерного излучений с плазмой, широко представленной в научной литературе.

Ключевые слова: плазма, динамика, СВЧ поле, электрон, ион, осцилляторная энергия частиц, мультипактор, импульсы СВЧ и лазерного излучения, магнитное поле, СВЧ - квазипотенциал, электрон - атомные столкновения, электропроводность плазмы, диэлектрическая проницаемость плазмы, распространение и поглощения СВЧ волн в изотропной плазме.

The book was written on the basis of a course of lectures delivered for a number of years at the National Research Nuclear University MEPhI (NRNU MEPI). The goal of the book is to introduce undergraduate and postgraduate students of physical specialties into an important part of the physics of the interaction of strong electromagnetic waves of the microwave band with charged particles and plasma. In strong microwave fields, electrons gain enough energy to ionize gases and excite condensed media and the interaction of strong microwave waves with plasma reveals the most important properties of plasma as a special state of matter, significantly different in properties from gaseous and condensed media.

The theoretical basis of the course is nonrelativistic electrodynamics and classical mechanics, which is based on the equations of motion of charged particles in force fields arising in strong uniform and inhomogeneous electromagnetic waves. Examples of calculations of the characteristics of the motion of charged particles in the fields of microwave waves and laser radiation, which obey the same laws of physics, are given. The course is also based on the experience of the experimentals and computational simulations connected with the study of the interaction of strong microwave waves with plasma, gas and condensed media at the Lebedev Physical Institute and Prokhorov General Physics Institute of the Russian academy of sciences. Mastering the materials of the book will allow readers to study more complex scientific materials on plasma electrodynamics, as well as to enter into the researches of interaction of the strong microwave and laser radiation with plasma, widely represented in the scientific literature.

© Иванов В.А.

© НИЯУ МИФИ

ISBN 978-5-6042115-2-6

© ЗАО НТЦ ПЛАЗМАИОФАН

Содержание

Введение	6 – 11
Лекция 1. Электромагнитные волны СВЧ диапазона частот, соотношение СВЧ волн с электромагнитными волнами других частотных диапазонов, области применения СВЧ волн	12 – 23
Лекция 2. Движение электронов в СВЧ поле в отсутствии столкновений	24 – 47
Лекция 3. Движение электронов в однородном импульсном СВЧ поле в отсутствии столкновений	48 – 60
Лекция 4. Резонансный и нерезонансный вторично-эмиссионные электронные СВЧ разряды, развивающиеся на поверхности металлов или диэлектриков – мультипакторные разряды	61 – 109
Лекция 5. Движение электронов в пространственно неоднородном СВЧ поле $\vec{E}(x,t)$. Формирование одномерного высокочастотного квазипотенциала в конфигурации $\nabla E^2(x,t) \updownarrow \vec{E}(x,t) \updownarrow \vec{e}_x$	110 – 120
Лекция 6. Движение электронов в неоднородных полях СВЧ волн $\vec{E}(x,y,z,t)$ и формирование трехмерного высокочастотного квазипотенциала	121 – 144
Лекция 7. Движение электронов в однородном поле СВЧ волны $\vec{E}(t)$ и в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}_0$	145 – 167
Лекция 8. Движение электронов в неоднородном поле $\vec{E}(x,t)$ СВЧ волны и в постоянном однородном магнитном поле	168 – 183

$\vec{H}_0$ в конфигурации $\nabla \vec{E}^2(x,t) \updownarrow \vec{E}(x,t) \updownarrow \vec{e}_x \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_y$

Лекция 9. Движение электронов в неоднородном поле СВЧ 184 – 198
волны $\vec{E}(y,t)$ и в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}_0$ в
конфигурации $\nabla \vec{E}^2(y,t) \perp \vec{E}(y,t) \updownarrow \vec{e}_x \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_z$

Лекция 10. Движение электронов в неоднородном поле СВЧ 199 – 208
волны $\vec{E}(y,t)$ и в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}_0$ в
конфигурации $\nabla \vec{E}^2(y,t) \parallel \vec{e}_y \perp \vec{E}(y,t) \updownarrow \vec{e}_x \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_y$

Лекция 11. Движение электронов в неоднородном поле СВЧ 209 – 221
волны $\vec{E}(x,t)$ и в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}_0$ в
конфигурации $\nabla \vec{E}^2(x,t) \updownarrow \vec{E}(x,t) \updownarrow \vec{e}_x \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_z$

Лекция 12. Движение электронов в неоднородном поле 222 – 233
 $\vec{E}(z,t)$ СВЧ волны и в постоянном однородном магнитном поле
 $\vec{H}_0$ в конфигурации $\nabla \vec{E}^2(z,t) \updownarrow \vec{e}_z \perp \vec{E}(z,t) \updownarrow \vec{e}_x \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_y$

Лекция 13. Движение электронов в неоднородном поле СВЧ 234 – 244
волны и в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}_0$ в
конфигурации $\nabla \vec{E}^2(z,t) \updownarrow \vec{e}_z \perp \vec{E}(z,t) \updownarrow \vec{e}_x \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_z$

Лекция 14. Уравнение движения электронов в СВЧ поле 245 – 262
при учете упругих столкновений с атомами или ионами

Лекция 15. Уравнение для энергии электронов в СВЧ поле 263 – 281
при учете упругих столкновений в плазме. Прохождение СВЧ
излучения через слой и поглощение СВЧ излучения в слое
плазмы

Лекция 16. Электропроводность и диэлектрическая
проницаемость однородной плазмы в СВЧ поле 282 – 294

Лекция 17. Комплексная диэлектрическая проницаемость и
комплексная электропроводность плазмы в СВЧ поле 295 – 302

Лекция 18. Распространение и затухание СВЧ волн в
однородной и изотропной плазме 303 – 320

Литература 321 – 330

Задачи 331 – 368

Контрольные вопросы 369 – 377

Введение

Лекции посвящены изучению особенностей движения электронов и плазмы в СВЧ поле, что очень важно для понимания фундаментальных свойств плазмы как особой среды, существенно отличающейся по свойствам от конденсированных сред и газов. Лекции рассчитаны на студентов старших курсов физических специальностей и магистрантов, изучивших общую физику, классическую электродинамику и основы физики плазмы. В лекции 1 проводится соотношение радиоволн различного диапазона с волнами сверхвысокочастотного (СВЧ) диапазона, которые в англоязычной литературе имеют название – микроволны (microwaves). Поскольку российские ученые часто публикуются в англоязычных журналах, представляют доклады на международных конференциях на английском языке, то, естественно, термин «микроволны» переключался в лексикон и российских научных журналов и конференций. Поэтому в данном курсе применение терминов «СВЧ волны» и «микроволны» эквивалентно. Далее в лекциях 2 и 3 рассматривается движение электронов в СВЧ поле как непрерывного действия, так и в импульсном СВЧ поле. В лекции 4 излагаются простые модели, описывающие вторично-эмиссионные электронные СВЧ разряды – мультипакторные разряды или мультипактор. Термин мультипактор (от английского multipactor) в настоящее время также используется и в российских научных журналах в силу его краткости. Описание мультипактора, как правило, не встречается в учебниках по СВЧ разрядам, в то время как в современной технике космической СВЧ связи они часто проявляются в виде различных типов нарушений СВЧ связи космических аппаратов с наземными станциями. Этим проблемам стабильности космической связи посвящены регулярные международные конференции, проводимые с участием представителей Европейского космического агентства (ESA), Национального космического агентства США

(NASA) и других организаций стран мира, проводящих запуски аппаратов различного назначения в космическое пространство.

В лекциях 5 и 6 рассматривается такое важное явление в электродинамике плазмы как формирование и действие сверхвысокочастотного (СВЧ) квазипотенциала в пространственно неоднородном СВЧ поле. В научной литературе часто используется термин «высокочастотный квазипотенциал» или ВЧ-квазипотенциал, которым обозначают пондеромоторные силы, возникающие в неоднородных переменных электромагнитных полях как СВЧ, так и лазерного диапазонов частот. При этом действие СВЧ квазипотенциала на электроны, а вследствие кулоновского взаимодействия на ионы и на плазму в целом, состоит в том, что возникает сила, направленная против градиента СВЧ квазипотенциала. Поскольку величина СВЧ квазипотенциала пропорциональна квадрату электрического СВЧ поля и обратно пропорциональна квадрату его частоты, то возникающая при этом сила действует против градиента СВЧ квазипотенциала, и не связана с направлением вектора электрического СВЧ поля. Такую силу принято называть пондеромоторной. Величина этой силы при одинаковых величинах полей сильнее проявляется для СВЧ диапазона длин волн, чем для лазерного излучения, т.к. сила обратно пропорциональна квадрату частоты. Однако уже для интенсивностей неоднородного лазерного излучения более $10^{16} \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-3}$ величина пондеромоторной силы значительная, и теория квазипотенциала работает в полном объеме.

В лекции 7 рассматривается движение электронов в однородном потоке СВЧ излучения в присутствии постоянного однородного магнитного поля. Исследуется характер движения электронов при ортогональной ориентации векторов постоянного магнитного поля и электрического СВЧ поля, и показано проявление эффекта диамагнетизма электронов плазмы. В такой же конфигурации рассмотрено явление электронного циклотронного резонанса для электронов в СВЧ поле в постоянном магнитном поле.

В лекциях 8 – 13 рассматриваются движения электронов плазмы в потоке неоднородного СВЧ излучения в присутствии постоянного однородного магнитного поля. Приведены примеры различных ориентаций вектора постоянного магнитного поля относительно векторов электрического и магнитного поля СВЧ волны, волнового вектора, а также градиента неоднородности СВЧ поля. Показано, что во всех рассмотренных случаях формируется СВЧ квазипотенциал, величина которого пропорциональна квадрату электрического поля СВЧ волны и обратно пропорциональна разности квадратов частоты СВЧ поля и электронной циклотронной частоты. Воздействие давления СВЧ квазипотенциала на электроны, а в результате кулоновской силы между электронами и ионами давления на всю плазму, реализуется в виде силы, действующей против градиента СВЧ квазипотенциала. При этом при частотах СВЧ выше электронной циклотронной частоты (ЭЦЧ) формируется энергетический «горб» квазипотенциала, и на электроны и плазму в целом будет действовать сила, толкающая с вершины горба – от больших значений СВЧ квазипотенциала к меньшим его значениям. При частотах СВЧ волны ниже ЭЦЧ возникает не «горб», а энергетическая потенциальная «яма», минимум которой совпадает в пространстве с максимумом СВЧ поля. Таким образом, в такой конфигурации полей и при таких соотношениях частот, электроны и плазма под действием ponderomotorной силы стягиваются на дно потенциальной ямы и могут удерживаться в ней при условии, что плотность плазмы существенно ниже критического значения, характерного для СВЧ волны.

В лекции 14 на примере простой модели упругого столкновения частиц рассчитывается доля энергии, которая передается от быстрой частицы с малой массой медленной частице с большой массой. Далее на основе диаграммы рассеяния в гидродинамическом приближении вычисляется сила, приводящая к торможению быстрых легких частиц, например электронов, при их движении в газе, т.е. с учетом упругих столкновений с атомами.

Выводится уравнение движения для электронов в СВЧ поле с учетом упругих соударений с атомами газа. Находится решение этого уравнения и проводится анализ выражения для скорости электронов в СВЧ поле при наличии соударений.

В лекции 15 выводится выражение для энергии электрона, находящегося в СВЧ поле с учетом соударений с атомами. Показано, что при каждом столкновении электрона часть энергии от СВЧ поля переходит к электрону. Величина этой энергии соответствует энергии осцилляции электрона в СВЧ поле с учетом частоты столкновений. Приводится вывод уравнения для изменения энергии электрона в СВЧ поле при столкновении с атомом. Анализируется решение этого уравнения. При этом показано, что величина энергии, которую может набрать электрон может существенно превышать осцилляторную энергию в СВЧ поле. Процесс передачи части энергии от электрона к атому при столкновении в СВЧ поле ограничивает максимальную энергию электронов величиной осцилляторной энергии электрона, умноженной на отношение массы атома к удвоенной массе электрона. Получена формула для удельной объемной энергии электронов плазмы, передаваемой от СВЧ волны. Установлена формула для электропроводности плазмы в СВЧ поле. Приводится уравнение Бугера–Ламберта для поглощения СВЧ излучения в плазме. Получено выражение для величины «линейного» (т.е. не зависящего от величины СВЧ поля) поглощения СВЧ излучения в плазме. Выведено выражение для коэффициента поглощения СВЧ излучения в слое плазмы.

В лекции 16, на основе ранее полученного выражения для скорости электрона в СВЧ поле с учетом столкновений в плазме, получена формула для плотности тока в плазме в СВЧ поле, а из его сравнения с выражением для плотности тока из уравнения Максвелла, получены выражения для электропроводности плазмы и для диэлектрической проницаемости плазмы в СВЧ поле. Проведен анализ этих выражений при различных соотношениях

частоты СВЧ волны, частоты столкновений электронов и ленгмюровской частоты в плазме. Показано, что плазма как среда, в зависимости от соотношения характерных частот, может вести себя в СВЧ поле или подобно диэлектрику, или подобно металлу, а в некоторых случаях подобно антисегнетоэлектрику, что указывает на особые свойства плазмы, не сводимые к свойствам других сред.

В лекции 17 из уравнений Максвелла получено волновое уравнение для электрического поля СВЧ волны $\vec{E}(t)$, и показано, что решением этого уравнения могут быть как действительные периодические функции типа $\vec{E}_0 \sin(\omega t - kz)$ или $\vec{E}_0 \cos(\omega t - kz)$, так и их комплексные комбинации типа $\vec{E}_0 [\cos(\omega t - kz) \pm i \sin(\omega t - kz)] = \vec{E}_0 \cdot e^{\pm i(\omega t - kz)}$. Представляя СВЧ волну в комплексном виде $\vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - kz)}$ необходимо электропроводность и диэлектрическую проницаемость плазмы также представлять в комплексном виде. Путем сравнения выражения плотности тока в плазме в виде зависимости от электрического поля в комплексном виде, и сравнения его с выражением для плотности тока из уравнения Максвелла, получена формула для комплексной электропроводности изотропной плазмы. Путем выражения плотности тока в плазме через производную электрического поля в комплексном виде, и сравнения с плотностью тока из уравнения Максвелла, получено выражение для комплексной диэлектрической проницаемости изотропной плазмы в СВЧ поле. В результате анализа полученных выражений установлено, что комплексное выражение для электропроводности плазмы в своей мнимой части содержит информацию о диэлектрической проницаемости плазмы, а комплексное представление диэлектрической проницаемости содержит в своей мнимой части содержит информацию об электропроводности плазмы. Поэтому при решении уравнений, описывающих распространение и поглощение СВЧ волн в плазме, достаточно учитывать либо комплексную электропроводность, либо

комплексную диэлектрическую проницаемость. Показано также, что выражения для комплексных диэлектрической проницаемости и электропроводности плазмы будут менять знак между действительной и мнимой частями в случае изменения вида представления СВЧ волны $\vec{E}_0 \cdot e^{i(\omega t - kz)}$ на $\vec{E}_0 \cdot e^{i(kz - \omega t)}$.

В лекции 18 получено волновое уравнение для плазмы в комплексном виде. Найдено общее решение волнового уравнения для СВЧ волны, распространяющейся в плазме. Получено дисперсионное выражение для плазмы, из которого вычислены общие выражения для коэффициента затухания СВЧ волны в плазме, выражение для волнового числа в плазме. На основе анализа общих выражений для затухания и волнового числа рассмотрено 4 асимптотических случая, определяемых соотношениями частоты СВЧ поля, частоты столкновений электронов в плазме и ленгмюровской частоты плазмы. Эти случаи описывают бесстолкновительную редкую плазму, бесстолкновительную плотную плазму, сильно столкновительную редкую плазму, сильно столкновительную плотную плазму. Для каждого случая получены выражения для постоянной затухания СВЧ поля в плазме и размера скин-слоя, для волнового числа СВЧ волны и ее фазовой скорости в плазме.

В конце каждой лекции приводятся примеры применения формул и решения задач по тематике лекции. В конце пособия представлены задачи, решение анализ которых помогут глубоко освоить материалы книги. Там же приводятся вопросы по курсу, которые могут входить в экзаменационные билеты.

Освоение курса позволит студентам, магистрантам и аспирантам физических специальностей самостоятельно изучать уже сложные курсы по электродинамике плазмы, а также войти в тематику взаимодействия сильных СВЧ волн с плазмой, представленной в современной научной литературе.

Лекция 1. Электромагнитные волны СВЧ диапазона частот – микроволны, соотношение СВЧ волн с электромагнитными волнами других частотных диапазонов, области применения СВЧ волн

СВЧ волны – это электромагнитные (ЭМ) волны сверхвысокой частоты, сокращенное название в русской технической литературе - волны СВЧ. Эти СВЧ волны называются также микроволнами, и эти термины эквивалентны. Термин микроволны наряду с СВЧ прочно вошел в русскоязычную лексику из англоязычной научно-технической литературы в конце 50-х годов, когда появились возможности участия ученых из России в работе международных научных конференций по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу. В это время за рубежом в физических исследованиях стали применяться микроволны для измерения концентрации заряженных частиц в плазме. В пользовании у научных сотрудников, работающих в области физики плазмы, стали появляться переведенные с английского языка монографии и сборники научных трудов международных научных конференций на английском языке, в которых излагались основы теории распространения микроволн и их применение в экспериментах по исследованию плазмы. Поскольку термин микроволны (СВЧ) является устоявшимся в международном общении ученых, то его применяют в настоящее время практически повсеместно для обозначения электромагнитных волн в очень широком диапазоне длин волн λ от 30 см до 1 мм.

Для определения соотношения между микроволнами (СВЧ) и другими диапазонами электромагнитных волн, рассмотрим известную шкалу волн радиодиапазона, применяющегося для гражданского и специального радиовещания, а также для средств беспроводной радиосвязи. Диапазон электромагнитных волн, использующихся в радиовещании и телевидении,

делится на интервалы (поддиапазоны) по длинам волн и частотам, которые имеют свои названия.

Интервал длинных волн (ДВ или в англоязычной литературе - LW) – это ЭМ волны с длинами волн от 100000 м до 1000 м (частоты колебаний от 3 кГц до 300 кГц).

Интервал средних волн (СВ или MW)- это ЭМ волны с длинами волн от 1000 м до 100 м (частоты колебаний от 300 кГц до 3 МГц).

Интервал коротких волн (КВ или SW) – это ЭМ волны с длинами волн от 100 м до 10 м (частоты колебаний от 3 МГц до 30 МГц).

Интервал ультракоротких волн (УКВ или UHF)– это ЭМ волны с длинами волн в диапазоне от 10 м до 1 м (частоты колебаний от 30 МГц до 300 МГц).

Интервал ультра ультракоротких волн (УУКВ или UUNF) – это ЭМ волны с длинами волн в диапазоне от 1 м до 0,3 м (частоты колебаний от 300 МГц до 1 ГГц, используемые для телевизионного вещания в субметровом и дециметровом диапазонах длин волн).

Электромагнитные волны с более короткими длинами волн λ от 30 см до 1 мм (соответствующие частоты колебаний от 1 ГГц до 300 ГГц) называются микроволнами. В англоязычной научно-технической литературе используются специальные обозначения для поддиапазонов микроволн (см. Таблица 1.1).

Важное свойство микроволн заключается в том, что их можно транспортировать по специальным трубам – волноводам. Волноводы бывают прямоугольного и круглого сечения. Характерный поперечный размер таких труб - волноводов (диаметр для волноводов круглого сечения, наибольшая сторона для труб прямоугольного сечения) составляет дециметры, сантиметры или миллиметры в зависимости от длины волны распространяющегося по ним СВЧ излучения. Волноводы с такими характерными размерами (от дециметров до миллиметров), как правило,

изготовлены из высококачественной меди с необходимой точностью размеров для того, чтобы мода волны не изменялась в процессе своего распространения по волноводу.

Книга посвящена взаимодействию сильных электромагнитных волн СВЧ диапазона с заряженными частицами и плазмой. Под сильными СВЧ волнами будем подразумевать такие, в полях которых электроны набирают энергию, достаточную для ионизации газа и возбуждения конденсированной среды. В этой связи мы будем упоминать такие генераторы непрерывного и импульсного СВЧ излучения, которые дают мощное выходное излучение масштаба от 1 кВт до 1 ГВт.

Важным параметром микроволн, применяемых в технологических целях, является мощность излучения. Генераторы микроволн характеризуются импульсной мощностью, средней мощностью, непрерывной мощностью. В зависимости от технологических задач используются различные типы генераторов. В данном курсе лекций особое внимание будет уделено взаимодействию с заряженными частицами и газом достаточно мощных источников микроволн, генерирующих большую импульсную мощность (от 1 кВт до 1 ГВт) для ионизации газа и создания плазмы. Будет рассмотрено также действие на заряженные частицы (электроны и ионы) СВЧ излучения с непрерывной или средней мощностью масштаба нескольких киловатт для создания и нагрева плазмы. Создаваемая СВЧ излучением плазма имеет хорошую технологическую перспективу. В ряде случаев будет проводиться сравнение особенностей взаимодействия СВЧ и лазерного излучения с заряженными частицами и плазмой.

Для уменьшения потерь при передаче СВЧ мощности (особенно в случае наиболее коротковолнового излучения) волноводы покрываются внутри тонким слоем серебра или золота толщиной несколько микрон. Волны поддиапазонов LW, MW, SW, UHF и UHF в принципе также могут распространяться по волноводам, однако для этого требуются волноводы таких больших поперечных размеров (более 0.5 м), которые в реальной

технике не используются, так как изготовление и эксплуатация таких волноводов нетехнологичны.

Таблица 1.1. Поддиапазоны микроволн и соответствующие им интервалы частот и длин волн, типы генераторов микроволн и их технические характеристики.

<i>Обозначение интервала</i>	<i>Интервалы частот f в ГГц</i>	<i>Длины волны λ в мм</i>	<i>Тип генераторов мощного СВЧ излучения (максимальная мощность в импульсе – P, длительность импульса – τ, КПД – η), тип генерируемых волн</i>
L	1-2	300 – 150	Магнетрон ($P=10\text{МВт} - 100\text{кВт}$, $\tau=1\text{мкс}-1000\text{мс}$, $\eta=50\%$, волноводная мода TE_{10}). Клистрон ($P=50\text{МВт}-100\text{кВт}$, $\tau=1\text{мкс}-1000\text{мс}$, $\eta=75-40\%$, коаксиальная мода или волноводная мода TE_{10}). Карсиноторон ($P=10\text{ГВт}-300\text{МВт}$, $\tau=50\text{нс}-1\text{мкс}$, $\eta=20\%$, волноводная мода TE_{10} или поперечная электромагнитная волна ТЕМ, распространяющаяся в свободном пространстве).
C	2-4	150 – 75	Магнетрон. Кликстрон. Карсиноторон
S	4-8	75 – 37.5	Магнетрон. Кликстрон. Карсиноторон
X	8-12	37.5 – 25	Магнетрон. Кликстрон. Карсиноторон
Ku	12-18	25 – 16.7	Магнетрон. Кликстрон. Карсиноторон
K	18-27	16.7 – 11.1	Магнетрон. Кликстрон. Карсиноторон
Ka	27-40	11.1 – 7.5	Магнетрон. Кликстрон. Карсиноторон
Q	30-50	10 – 6	Гиротрон ($P=1-10\text{МВт}$, $\tau=1000\text{с}-2\text{мкс}$, $\eta=50\%$) Магнетрон. Кликстрон. Карсиноторон
U	40-60	7.5 – 5	Магнетрон. Кликстрон. Гиротрон
V	50-75	6 – 4	Магнетрон. Гиротрон
E	60-90	5 – 3.3	Магнетрон. Гиротрон
W	75-110	4 – 2.7	Магнетрон. Гиротрон
F	90-140	3.3 – 2.1	Магнетрон. Гиротрон
D	110-170	2.7 – 1.8	Магнетрон. Гиротрон

Электромагнитные волны с частотой ниже 1 ГГц возбуждаются в свободном пространстве штыревыми радиоантеннами, но могут транспортироваться в коаксиальных фидерах и кабелях. Возможности

фокусировки таких волн весьма ограничены, так как для этого требуются антенные элементы или целые системы излучателей, сгруппированных в антенные решетки, очень больших размеров, соизмеримых с десятками и сотнями длин волн. Такие крупномасштабные антенные системы применяются для приема космического излучения радиодиапазона. Волны с длиной волны короче 1 мм в частотном диапазоне от 300 ГГц до 1 ТГц называются субтерагерцовыми, а выше 1 ТГц - терагерцовыми волнами. Для транспортировки таких волн на большие расстояния уже не применяются одномодовые волноводы, т.к. для этого необходимы волноводы очень малого размера (менее 1 мм поперечного размера), и возможности применения таких волноводов весьма ограничены в силу больших сложностей изготовления. Еще одной существенной причиной отказа от применения одномодовых волноводов в терагерцовом диапазоне электромагнитного излучения является сильное затухание волн в таких волноводах. Столь короткие субмиллиметровые волны (волны терагерцовых частот) по методам генерации и транспортировки примыкают к волнам далекого инфракрасного диапазона. Генераторами таких волн являются как вакуумные электродинамические высокоомодовые системы (например, гиротроны), так и приборы, в которых волны возбуждаются в результате взаимодействия с импульсными релятивистскими электронными пучками, получившие название «лазеры на свободных электронах».

Довольно широко представлены системы, генерирующие т.н. терагерцовое излучение, построенные на основе газоразрядных лазеров, в которых источниками излучения являются молекулы и атомы, например лазеры на парах воды, HCN -лазеры. Эти субмиллиметровые (терагерцовые) волны транспортируются уже в свободном пространстве и управляются с использованием квазиоптических элементов – линз, зеркал, дифракционных решеток и т.п.

Таким образом, для диапазона микроволн имеются технические возможности для их транспортировки по волноводным системам с малыми

потерями, а также для управления потоками микроволн с использованием волноводных элементов.

Микроволны также возможно выводить из волноводных систем в свободное пространство или вводить в волновод из свободного пространства, фокусировать в свободном пространстве с помощью как специальных волноводных элементов, так и квазиоптических элементов типа линз и зеркал с поперечными размерами от 4λ до 100λ и более.

В последние 50 лет микроволны применяются во многих сферах деятельности человека. Наиболее широкое применение микроволны получили в области радиолокации. В радиолокаторах наземного и самолетного базирования используются микроволны от дециметрового диапазона до миллиметрового диапазона с различными системами фокусировки излучения и устройствами для управления излучением в пространстве. Широко применяются микроволны в системах дальней и космической радио, телевизионной и информационной связей. В последние годы микроволны широко применяются в сотовой телефонной связи, например, в стандарте GSM используются электромагнитные волны с частотами 1800 МГц и 900 МГц, что соответствует длинам микроволн 16.7 см и 33.4 см соответственно. В быту и на предприятиях для приготовления пищи используются микроволновые печи с частотой электромагнитных колебаний 2.45 ГГц (длина волны 12.25 см). Все более широкое применение находят микроволны в различных технологических процессах, например, для приготовления упаковочных материалов из бумажных отходов, для сушки изделий из древесины, для термообработки различных материалов и т.д.

Таким образом, учитывая высокую эффективность преобразования сетевой электроэнергии в энергию СВЧ излучения (как правило, около 50%) и особенности его поглощения в объеме материалов, во многих случаях применение микроволн в технологических процессах оказывается

значительно экономичнее использования традиционных источников тепловой энергии, например, электрических и химических.

Широко применяется СВЧ излучение в физических исследованиях. Так в установках типа токамак и стелларатор используются СВЧ излучение для нагревания плазмы до термоядерных температур. Так в условиях электронного циклотронного резонанса в стеллараторе “Ливень-2М” (ИОФ РАН) при мощности СВЧ излучения всего 400 кВт температура электронной компоненты плазмы достигает 1000 эВ. На установке токамак Т-10 в Национальном Исследовательском Центре «Курчатовский институт» применялись несколько гиротронов – генераторов микроволн – с суммарной мощностью до 3 МВт для нагрева электронной компоненты плазмы до температуры в несколько кэВ. Во многих экспериментальных установках используются микроволновые интерферометры и рефлектометры для измерения концентрации электронов в плазме и для изучения движения границы плазмы. Широко применяется пассивная микроволновая диагностика, основанная на приеме и анализе СВЧ излучения плазмы из области электронного циклотронного резонанса, что позволяет получать дополнительные данные о пространственном распределении температуры электронов плазмы в токамаках и стеллараторах. В современных экспериментальных установках быстро развиваются методы контроля турбулентного состояния плазмы с помощью активной диагностики рассеяния микроволн на плазменных флуктуациях. Эти исследования нацелены на разработку локальных методов измерения потоков энергии и частиц, возникающих вследствие развития турбулентных процессов в высокотемпературной замагниченной плазме.

Уже достаточно давно микроволны применяются в ускорительной технике. Так в линейных ускорителях электронов используется СВЧ излучение дециметрового и сантиметрового диапазонов для получения цуга (группы импульсов) из нескольких коротких электронных сгустков

длительностью от 0.1 нс до 1 пс с энергией от 10 до 100 МэВ. В таких устройствах ускорение электронов проходит в результате многократного прохождения электронного пучка через волноводы или резонаторы, в которых распространяются бегущие или стоячие микроволны. Однократное ускорение электронов происходит в электрическом поле СВЧ излучения, в момент прохождения электронного пучка через волновод или резонатор в благоприятной фазе волны. Электроны, пролетая сквозь одно ускорительное устройство, набирают энергию порядка eEL (e – заряд электрона, E – амплитуда электрического СВЧ поля в резонаторе или в волноводе в момент прохождения электрона, L – размер области существования поля). Для средних ускорителей характерная величина прироста энергии электронов при однократном прохождении области составляет величины от 0.1 до 1 МэВ. При использовании 100 ускорительных устройств, как правило, располагающихся вдоль линии ускорения (отсюда название – линейный ускоритель), на выходе ускорителя получаются электронные пучки с энергией до 100 МэВ. В настоящее время в США (SLAC National Accelerator Laboratory) действует линейный ускоритель электронов длиной 3.2 км с максимальной энергией электронов в пучках 50 ГэВ. В настоящее время в Европе проектируется линейный ускоритель с применением мощных СВЧ генераторов для получения импульсных электронных пучков с максимальной энергией до 500 ГэВ.

На основе мощных микроволновых генераторов (мощностью в десятки киловатт) с использованием фокусированного потока излучения в газе, находящемся в резонансном постоянном магнитном поле, в котором частота вращения электрона вокруг силовой линии магнитного поля близка к частоте СВЧ излучения, а векторы электрического СВЧ поля и магнитной индукции взаимно ортогональны, создается плазма с горячими электронами и высокоионизованными атомами. Такие устройства применяются в качестве источника многозарядных ионов для ускорителей.

В зависимости от назначения в микроволновых системах используются генераторы непрерывного и импульсного СВЧ излучения различной мощности. Современные генераторы непрерывного СВЧ излучения могут устойчиво работать в диапазоне значений излучаемой мощности от микроватт до нескольких киловатт. Генераторы непрерывного СВЧ излучения киловаттной мощности выпускают практически все ведущие страны Европы (Россия, Германия, Франция) и Америки (США), а также наиболее развитые страны в Азии (Китай, Япония, Республика Корея). Эти генераторы весьма надежны в эксплуатации, имеют значительный ресурс работы (до 50 тысяч часов), и широко применяются в различных промышленном производстве, а также при разработке новых технологий.

В последнее время весьма актуальной является плазменная технология выращивания больших алмазных пластин диаметром до 100 мм и толщиной до 2.5 мм (Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Институт прикладной физики РАН). Эти пластины из поликристаллического алмаза весьма перспективны для использования в технологии производства микро- и нанoeлектронных устройств. Прогресс в миниатюризации таких устройств требует повышения их тепловой и электрической стойкости. Уникальные свойства алмаза – высокая теплопроводность и электрическая стойкость – позволяют создавать наноустройства электроники, которые на порядок превосходят существующие по быстродействию. Алмазные пластины являются перспективным материалом для выходных окон современных и будущих микроволновых генераторов (гиротронов мегаваттного уровня мощности непрерывного действия) и входных окон технологических установок, в которых применяется мощное СВЧ излучение.

В России выполнены пионерские разработки СВЧ генераторов – гиротронов, мощность непрерывного СВЧ излучения которых достигает 20 кВт. Разработаны перспективные гиротроны квазинепрерывного действия мощностью до 2 МВт и длительностью импульсов до 1000 секунд

(разработка Института прикладной физики РАН и российской компании ГИКОМ). Такие мощные генераторы непрерывного СВЧ излучения предназначены для нагрева плазмы в международном экспериментальном токамаке – реакторе ITER.

Плазменные источники, работающие с использованием СВЧ излучения, в настоящее время широко применяются для обработки различных материалов – полупроводников, металлов, диэлектриков, композитов. Например, в Японии уже в течение нескольких лет широко используются микроволновые генераторы плазмы с высокой степенью однородности на основе возбуждения поверхностных волн с помощью слот – антенн для обработки материалов, применяющихся при изготовлении плазменных и жидкокристаллических телевизионных панелей и экранов с характерными размерами от 1 до 4 м.

Микроволновые (СВЧ) плазменные устройства находят применение для решения ряда экологических проблем в России и за рубежом. Так, к России перешел от СССР большой запас боевых отравляющих веществ, которые необходимо уничтожить наиболее безопасным способом. Также имеется много производств, в процессе которых происходит выделение очень вредных газов, которые необходимо утилизировать без вредных выбросов в атмосферу. Сходные проблемы существуют в области утилизации фреонов, широко применяющихся в холодильном оборудовании и ряде других производств. Для решения этих проблем необходимы высокотемпературные плазменные устройства, в которых эти вредные вещества подвергались бы полному разложению до молекул и атомов, входящих в их состав. Оказывается, что микроволновые плазмотроны позволяют получать высокую температуру плазмы и газов (до 3000-5000 К) при атмосферном давлении, что вполне может быть применено для разложения различных газообразных и жидких вредных веществ.

Микроволновые плазменные устройства находят применение в очистке дымовых газов тепловых электростанций от микрочастиц и наночастиц,

которые представляют собой большую опасность для здоровья людей. Возбуждая разряды в дымовых газах, с помощью СВЧ излучения в них создается плазма с большим содержанием микрочастиц и наночастиц – так называемая пылевая плазма. В такой пылевой плазме микрочастицы приобретают большой заряд (до 10000 зарядов электрона), и, далее, с помощью статического электрического поля, создаваемого путем подачи высокого напряжения на электроды, расположенные в газовом потоке с пылевой плазмой, такие микро – и наночастицы удаляются из газового потока, при этом концентрация микрочастиц в дымовых газах может снижаться на несколько порядков.

Большие возможности применения микроволновых плазменных устройств имеются в медицине. Так актуальной задачей для медицины является разработка источников биологически активного ультрафиолетового излучения для быстрой и эффективной обработки материалов, инструмента и биологических тканей в процессе операции и на последующих стадиях реабилитации. Очень важно иметь плазменные источники для обработки металлов, сплавов и композитов, применяемых в ортопедии и стоматологии. Такие источники плазмы уже разрабатываются с использованием СВЧ излучения.

Таким образом, микроволновая (СВЧ) техника и плазменные устройства с применением микроволн эффективно развиваются, а микроволны находят все более широкое применение в различных отраслях современной промышленности, средствах связи, технологии, экологии, медицине и научных исследованиях. Среди многих областей применения микроволновой плазмы можно выделить следующие:

1. Микроволновые (СВЧ) источники плазмы для обработки материалов в современных производствах.
2. Плазменные микроволновые технологии для создания новых материалов:

- выращивание поликристаллических алмазных пластин в микроволновых разрядах,
 - получение сверхчистых материалов, например, производство особо чистого кремния при возбуждении микроволнового разряда в моносилане,
 - получение монокристаллов с высоким содержанием лазерно-активных центров окраски для интегральной и волоконной оптики.
3. Микроволновая (СВЧ) техника на основе мощных гиротронов для нагрева плазмы до термоядерных температур в токамаках, стеллараторах и осесимметричных магнитных ловушках.
4. Микроволновая диагностика низкотемпературной и высокотемпературной плазмы.
5. Плазменные микроволновые технологии, применяемые для обеспечения экологической безопасности на современных промышленных предприятиях:
- разрушения вредных газов и отравляющих веществ,
 - обработка дымовых газов и выбросов,
 - разрушение жидких вредных продуктов.
6. Микроволновые и плазменные источники УФ излучения для стерилизации медицинских материалов.

Таким образом, СВЧ (микроволновый) диапазон электромагнитного излучения широко применяется в различных отраслях промышленности, в космосе, в медицине, в бытовой технике, а также в научных исследованиях. Учитывая постоянное совершенствование техники микроволн, их применение ширится и проникает во все новые сферы человеческой деятельности. В этой связи исследования взаимодействия микроволн с плазмой, а также с различными материалами, являются актуальными и развивающимися направлениями физики и техники.

Лекция 2. Движение электронов в СВЧ поле в отсутствии столкновений

Из электродинамики известно, что переменное во времени электрическое поле $\vec{E}$ возбуждает переменное магнитное поле $\vec{H}$, в свою очередь переменное магнитное поле будет возбуждать переменное электрическое поле и т.д. В вакууме в отсутствии электрических зарядов эти переменные поля подчиняются уравнениям Максвелла, которые в Гауссовой системе имеют вид:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\text{div}\vec{E} = 0 \quad (2.2)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\text{div}\vec{H} = 0 \quad (2.4),$$

здесь c – фазовая скорость распространения электромагнитных волн в вакууме, равная скорости света.

Из этих уравнений можно получить волновое уравнение, описывающее распространяющиеся в вакууме гармонических колебаний электрического и магнитного полей или плоские электромагнитные волны.

Для этого сначала продифференцируем третье уравнение Максвелла (2.3) по времени, и получим следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}\vec{H} = \text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.5).$$

Применяя к первому уравнению Максвелла (2.1) операцию rot , и используя выражение (2.5), получим следующее уравнение:

$$-\left[\text{rot} \left[\text{rot}\vec{E} \right] \right] = \frac{1}{c} \text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

В левой части уравнения (2.6) стоит двойное векторное произведение, которое равно:

$$-\left[\text{rot} \left[\text{rot} \vec{E} \right] \right] = - \left\{ \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - (\text{div grad}) \vec{E} \right\} \quad (2.7).$$

Учитывая уравнение Максвелла (2.2), ясно, что первый член в правой части выражения (2.7) обращается в нуль, т.к. ищется решение для вакуума в отсутствии электрических зарядов.

Далее важно в явном виде представить второй член в правой части выражения (2.7). Для этого напомним выражения для векторных операторов *grad*, *div* и *rot* в декартовой системе координат с единичными векторами $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, направленными соответственно вдоль осей координат *OX*, *OY* и *OZ*.

Векторный оператор *grad* может быть представлен в виде вектора $\text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right\}$, который, действуя на скалярную функцию типа $\Sigma(x, y, z)$, формирует вектор:

$$\text{grad} \Sigma(x, y, z) = \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Sigma}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \Sigma}{\partial z} \vec{e}_z \right) \equiv \vec{\nabla} \Sigma(x, y, z) \quad (2.8),$$

где $\vec{\nabla}$ есть векторный оператор Набла, который в данном случае соответствует оператору *grad*, действующему на скалярную функцию $\Sigma(x, y, z)$.

Векторный оператор *div* может быть представлен в виде вектора $\text{div} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right\}$, который действуя на векторную функцию с компонентами $\{F_x(x, y, z); F_y(x, y, z); F_z(x, y, z)\}$, формирует скалярную функцию в виде:

$$\text{div} \vec{F}(x, y, z) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (2.9),$$

здесь $\vec{\nabla}$ тот же векторный оператор Набла, скалярное произведение которого с векторной функцией $\vec{F}$, дает скалярную функцию (2.9).

Векторный оператор rot может быть представлен в виде вектора $rot = (\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z) \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right\}$, который действуя на векторную функцию с компонентами $\{F_x(x, y, z); F_y(x, y, z); F_z(x, y, z)\}$, формирует векторную функцию вида:

$$rot \vec{F}(x, y, z) \equiv [\vec{\nabla} \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}) \vec{e}_x + (\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}) \vec{e}_y + (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}) \vec{e}_z \quad (2.10),$$

здесь $\vec{\nabla}$ векторный оператор Набла, векторное произведение которого с векторной функций дает вектор (2.10) или ротор векторной функции $\vec{F}(x, y, z)$.

Распишем в явном виде второй член правой части выражения (2.7) в декартовой системе координат. Этот член представляет собой скалярное произведение двух векторных операторов div и $grad$, действующих на вектор электрического поля $\vec{E}$. Учитывая выражения (2.9) и (2.8), получим следующее выражение:

$$(div \times grad) \vec{E} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial}{\partial z}) \right] \vec{E} = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \vec{E} \quad (2.11).$$

Далее, упростим задачу, рассматривая такие случаи, когда переменное электрическое поле однородно в пространстве по осям OX и OY . Это означает, что пространственные производные по координатам x и y равны нулю. Тогда из (2.11) получаем выражение в виде:

$$(div grad) \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \quad (2.12).$$

Таким образом, из выражений (2.12 и 2.6) получаем волновое уравнение для вектора электрического поля:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.13).$$

Из уравнения (2.13) ясно, что поле $\vec{E}$ является функцией координаты z и времени t , и решениями этого волнового уравнения являются функции, описывающие т.н. плоские электромагнитные волны, например, вида:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{e}_x E_x = \vec{e}_x E_0 \cdot \sin(\omega t - kz) \\ \vec{E} &= \vec{e}_x E_x = \vec{e}_x E_0 \cdot \cos(\omega t - kz) \\ \vec{E} &= \vec{e}_x E_x = \vec{e}_x E_0 \cdot \sin(kz - \omega t) \\ \vec{E} &= \vec{e}_x E_x = \vec{e}_x E_0 \cdot \cos(kz - \omega t) \end{aligned} \quad (2.14),$$

где ω и k константы, имеющие значение круговой частоты ω осцилляций электромагнитного поля и волнового числа k . Все решения (2.14) эквивалентны и их комбинации соответствуют распространяющимся вдоль оси OZ электромагнитным волнам с круговой частотой осцилляций ω и амплитудой электрического поля E_0 . Далее будем использовать из (2.14) первые два решения, которое подставим в уравнение (2.13) и убедимся в том, что они являются решениями этого волнового уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} &= \vec{e}_x E_0 (-k^2 \sin(\omega t - kz)) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \vec{e}_x E_0 (-\omega^2 \sin(\omega t - kz)) \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} &= \vec{e}_x E_0 (-k^2 \cos(\omega t - kz)) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \vec{e}_x E_0 (-\omega^2 \cos(\omega t - kz)) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Аналогичную проверку можно провести и для третьей и четвертой функций из (2.14). Из выражений (2.15) видно, что решения (2.14) удовлетворяют волновому уравнению (2.13) при условии:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}; c = \frac{\omega}{k}; k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.16),$$

где $f = \frac{\omega}{2\pi}$ – линейная частота поля, $T = \frac{1}{f}$ – период поля, k – волновое число, λ – длина электромагнитной волны.

Далее, не ограничивая общности подхода, а только для удобства будем работать с первым решением (2.14). Это обусловлено тем, что, как правило, генераторы электромагнитного поля начинают генерацию с нулевой фазой, т.е. в начальный момент времени $t=0$, величина электрического поля равна нулю, время изменяется от нуля и имеет положительный знак, и этим требованиям отвечает первая из функций (2.14), а именно:

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_x = \vec{e}_x E_0 \cdot \sin(\omega t - kz) \quad (2.17).$$

На рисунке 2.1. представлен график первого решения (2.15) в виде зависимости электрического поля от времени при постоянном значении координаты $Z=0$.

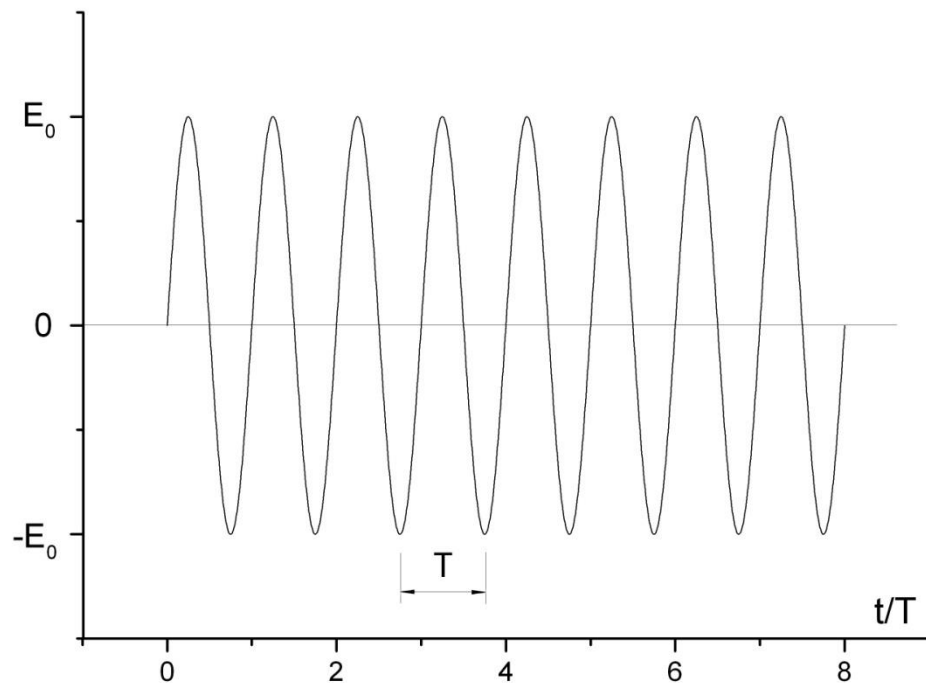


Рис. 2.1. Вид решения волнового уравнения $E_0 \sin(\omega t - kz) = E_0 \sin(2\pi \frac{t}{T} - kz)$ (2.17) в зависимости от времени на отрезке $t/T \in [0; 8]$ при фиксированном значении координаты $z=0$. T – период осцилляции электрического поля СВЧ волны.

Из (2.17) определим фазовую скорость распространения волны как скорость перемещения точки волны с постоянной фазой поля:

$$(\omega t - kz) = \text{const} \quad (2.18).$$

Дифференцируя по времени t выражение (2.18) получим скорость распространения точки волны с постоянной фазой (фазовую скорость электромагнитных волн в вакууме) в виде:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = c \quad (2.19).$$

Длина электромагнитной волны определяется и как длина пути, который волна проходит за период поля:

$$\lambda = cT = c \frac{1}{f} = c \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{k} \quad (2.20).$$

На рисунке 2.2. представлен график функции $E_0 \cdot \sin(\omega t - kz)$ в зависимости от координаты Z .

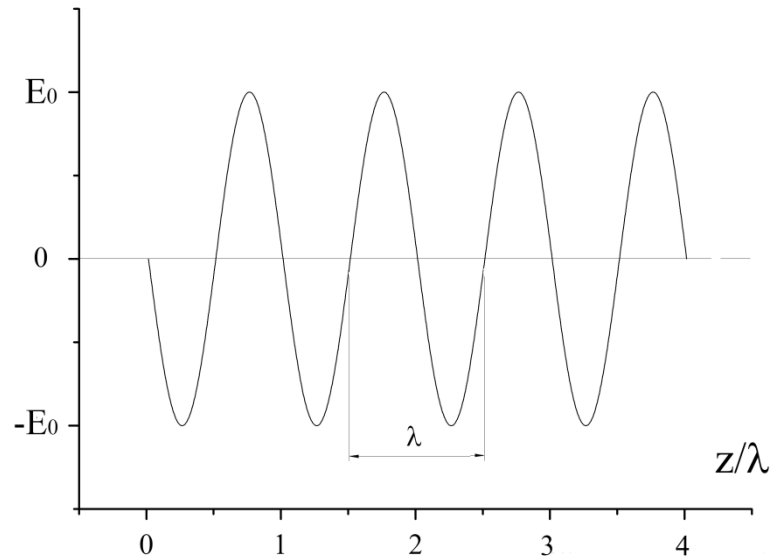


Рис. 2.2. График функции $E_0 \sin(\omega t - kz) = E_0 \sin(\omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda})$ (2.17) в зависимости от пространственной координаты Z на отрезке $z/\lambda \in [0; 4]$ в момент времени $t=4T$. λ – длина СВЧ волны.

Длину электромагнитной волны λ можно определить также и как расстояние по оси распространения волны OZ между точками, в которых фаза колебаний поля отличается на 2π в один и тот же момент времени:

$$\begin{aligned}
kz_2 - \omega t - (kz_1 - \omega t) &= 2\pi \\
k(z_2 - z_1) &= 2\pi \\
\lambda = z_2 - z_1 &= \frac{2\pi}{k}
\end{aligned} \tag{2.21}.$$

Если электрическое поле электромагнитной волны имеет вид (2.17), из уравнений Максвелла можно определить вид магнитной компоненты электромагнитного поля. Для этого решение (2.17) подставим в (2.1), и получим:

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_0 \sin(\omega t - kz) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \{0; -kE_0 \cos(\omega t - kz); 0\} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{2.22}.$$

Из (2.22) путем интегрирования по времени получаем выражение для переменной во времени величины магнитной компоненты поля в виде:

$$H_y(t) = kcE_0 \int \cos(\omega t - kz) dt = \frac{kc}{\omega} E_0 \sin(\omega t - kz) \tag{2.23}.$$

Постоянное магнитное поле в вакууме считаем равным нулю, ввиду отсутствия магнитных зарядов (2.4) и постоянных токов (2.4). При учете равенства $\frac{kc}{\omega} = 1$, соотношение амплитуд электрического и магнитного полей определяется формулой:

$$|H_y| = |E_x| \tag{2.24}.$$

Таким образом, в Гауссовой системе физических единиц в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в вакууме с фазовой скоростью c , электрическая и магнитная компоненты взаимно ортогональны, осциллируют синфазно, по абсолютной величине равны, а распространение волны происходит вдоль оси OZ , перпендикулярной плоскости XY , образованной векторами электрического поля $\vec{E}$ и магнитного поля $\vec{H}$.

В прямоугольной системе координат (с осями OX , OY , OZ) введем вектор распространения электромагнитной волны $\vec{k}$ (модуль которого равен волновому числу $k = \frac{\omega}{c}$) вдоль направления оси OZ , при этом электрическое поле волны будет осциллировать коллинеарно оси OX , тогда магнитное поле волны будет осциллировать коллинеарно оси OY . Таким образом, векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{k}$ составляют правовинтовую векторную систему.

При рассмотрении взаимодействия микроволн с заряженными частицами выражения для величин электрической и магнитной компонент волны можно записать также с учетом начальной фазы поля φ , т.е. в виде:

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_0 \sin(\omega t - kz + \varphi) \\ H_y(t) &= H_0 \sin(\omega t - kz + \varphi) \end{aligned} \quad (2.25).$$

Как правило, начальная фаза генератора электромагнитных волн равняется $\varphi = 0$. Однако в ряде случаев, например, при рассмотрении движения заряженных частиц в поле электромагнитной волны, начальная фаза поля по отношению к моменту «рождения» электрона может отличаться от нулевого значения. Так для электрона, возникшего в результате ионизации этого атома электроном плазмы в уже действующем СВЧ поле, фаза поля может иметь любое значение в интервале от 0 до 2π . Поэтому в некоторых случаях учет фазы включения поля может быть существенным при рассмотрении особенности движения электрона в СВЧ поле.

Рассмотрим свободный электрон с зарядом $-e$ и массой m в вакууме, на который воздействуют поля СВЧ излучения.

В гауссовой системе физических единиц выражение для силы Лоренца $\vec{F}$, действующей на электрон в электрическом $\vec{E}(t)$ и магнитном $\vec{H}(t)$ полях СВЧ излучения в вакууме, имеет вид:

$$\vec{F}(t) = -e\vec{E}(t) - \frac{e}{c} [\vec{V}(t) \cdot \vec{H}(t)] \quad (2.26),$$

здесь $c=3 \cdot 10^{10}$ см/с – скорость света в вакууме, $\vec{V}(t)$ – скорость электрона.

Для нерелятивистских скоростей электронов, когда $\vec{V}(t) \ll c$, второй член в выражении силы Лоренца, описывающий движение электрона в магнитном поле, оказывается пренебрежимо мал в сравнении с первым членом, описывающим движение электрона в электрическом поле плоской электромагнитной волны, распространяющейся в направлении оси OZ , так как содержит малый параметр $\vec{V}(t)/c \ll 1$:

$$|e\vec{E}(t)| \gg \left| \frac{e}{c} [\vec{V}(t) \cdot \vec{H}(t)] \right| \quad (2.27).$$

В силу этого, приближенное уравнение, описывающее нерелятивистское движение электрона вдоль координаты OX во времени в электрическом поле электромагнитной волны будет иметь простой вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE_x(t) \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{e}{m} E_x(t) \quad (2.28).$$

Как видно из (2.28), при одинаковом электрическом заряде, ускорение, приобретаемое в электрическом поле тяжелым (по сравнению с электроном) ионом массой M будет в M/m раз меньше по сравнению с ускорением, приобретаемым электроном. Поэтому движением ионов в СВЧ поле в первом приближении можно пренебречь по сравнению с движением электронов. Однако в плазме воздействие на электроны микроволновых полей приводит не только к движению электронов, но и ионов, в силу кулоновского взаимодействия ионов с электронами.

Для электрона, находящегося в осциллирующем электрическом поле $E_x(t) = E_0 \sin(\omega t - kz + \varphi)$, отсутствует сила, действующая вдоль оси OZ . Это означает отсутствие ускорения вдоль оси OZ . Наличие же постоянной начальной скорости электрона вдоль оси OZ не будет влиять на дальнейшее рассмотрение его движения по другим пространственным осям, так как

начало системы координат можно связать с инерциальной системой отсчета, движущейся равномерно с электроном вдоль этой оси OZ . Так как скорость электромагнитной волны в любой инерциальной системе равна скорости света в вакууме c , то, не ограничивая общности рассмотрения, можно принять для электрона $\frac{dz}{dt}=0, z=0, kz=0$, и уравнение движения электрона вдоль оси OX в электрическом поле микроволновой волны будет выглядеть так:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.29).$$

Для нахождения зависимости скорости частицы от времени t в СВЧ поле проинтегрируем по времени уравнение (2.29):

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t + \varphi) - C_1 \quad (2.30),$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Будем считать, что электрон в начальный момент имел нулевую скорость вдоль оси OX , т.е. при $t=0$, $V(0)=0$. Тогда из (2.30) получаем выражение для C_1 :

$$C_1 = \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\varphi).$$

Выражение для величины скорости электрона по оси OX получаем в виде:

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t + \varphi) - \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\varphi) \quad (2.31).$$

Как видно из (2.31) скорость электрона имеет осциллирующую во времени часть (первый член) и постоянную не осциллирующую часть (второй член). Постоянная составляющая скорости электрона в СВЧ поле, сравнивая по величине с осцилляторной скоростью, возникает только в СВЧ

импульсах с очень коротким передним фронтом длительностью $\frac{1}{4}T$, что в действительности и описывает формула (2.31). Как будет показано в следующих лекциях, для описания движения электронов в СВЧ поле наиболее важна именно осциллирующая часть скорости, в то время как постоянная составляющая скорости, связанная с начальной фазой включения СВЧ поля, как правило, не важна. При обычном переднем фронте импульса СВЧ генераторов длительностью в несколько десятков или сотен периодов СВЧ поля постоянная составляющая скорости электрона близка к нулевому значению, и она не будет играть существенного значения при рассмотрении движения электронов и плазмы в таком СВЧ поле.

Из выражения (2.31) также видно, что электроны, рождающиеся в разных фазах φ , будут иметь разные по величине и знаку постоянные составляющие скорости, при этом, в зависимости от фазы рождения, часть электронов будет одновременно осциллировать и двигаться с постоянной скоростью преимущественно вдоль OX , а другая часть – осциллировать и двигаться с постоянной скоростью преимущественно в противоположном направлении. Часть электронов, рожденных при фазе поля $\varphi = \pi/2$, будут только осциллировать и не иметь постоянную компоненту скорости. При этом независимо от величины и направления постоянной составляющей скорости, усредненный по периоду прирост энергии электрона будет определяться только осциллирующей частью скорости.

Величина:

$$V_0 = \frac{eE_0}{m\omega} \quad (2.32)$$

называется амплитудой осцилляторной (колебательной) скорости.

Рассмотрим далее только осцилляторную часть скорости электрона в СВЧ поле:

$$V_{осц}(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.33),$$

и рассчитаем осцилляторную энергию электрона (часть энергии электрона, обусловленную только осцилляциями) в СВЧ поле:

$$\mathcal{E}_{осц} = \frac{mV_{осц}^2(t)}{2} = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (2.34).$$

Видно, что осцилляторная энергия электрона изменяется во времени в интервале значений от нуля до максимального (амплитудного) значения равного $\frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2}$. Важна также усредненная по периоду поля T энергия осцилляторного движения электрона, или средняя осцилляторная энергия, которая получается из выражения (2.34) путем усреднения по временному интервалу от 0 до T :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ср.осц.} &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \left\{ \frac{mV_{осц}^2(t)}{2} \right\} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \left\{ \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \cos^2(\omega t + \varphi) \right\} = \\ &= \frac{1}{T\omega} \cdot \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \int_0^{2\pi} d(\omega t + \varphi) \{ \cos^2(\omega t + \varphi) \} = \\ &= \frac{1}{T\omega} \cdot \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \int_0^{2\pi} d(\omega t + \varphi) \left\{ \frac{1 + \cos 2(\omega t + \varphi)}{2} \right\} = \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \end{aligned} \quad (2.35).$$

Величина $\frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2}$ называется средней осцилляторной (средней колебательной) энергией электрона в СВЧ поле, которая в 2 раза меньше амплитуды осцилляторной энергии $\frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2}$.

Для определения зависимости от времени координаты электрона $x(t)$ в СВЧ поле, проинтегрируем по времени выражение (2.31) и получим выражение:

$$x(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) - \frac{eE_0 \omega t}{m\omega^2} \cos(\varphi) + C_2,$$

где C_2 – константа интегрирования.

Для начальных условий $t=0$, $x(t=0)=0$, получаем выражение для C_2 :

$$C_2 = -\frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(\varphi).$$

Тогда выражение для координаты электрона во времени будет иметь вид:

$$x(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) - \frac{eE_0 \omega t}{m\omega^2} \cos(\varphi) - \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(\varphi) \quad (2.36),$$

Из выражения (2.36) видно, что в электрическом поле электромагнитного (СВЧ) излучения электроны совершают как осциллирующее движение, так и равномерное поступательное движение, определяемое начальной фазой поля в момент «рождения» электрона.

Величина амплитуды осцилляций электрона в поле СВЧ излучения определяется как:

$$X_0 = \frac{eE_0}{m\omega^2} \quad (2.37).$$

В ряде случаев удобно оперировать с длиной волны СВЧ излучения λ вместо круговой частоты ω . Применяя соотношение между этими параметрами (2.19) $\omega = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi \frac{c}{\lambda}$, получим следующие выражения для величин осцилляторной скорости, средней осцилляторной энергии и амплитуды осцилляции электрона в поле СВЧ излучения, выраженные через λ :

$$V_0 = \frac{eE_0}{m\omega} = \frac{eE_0 \lambda}{2\pi mc} \quad (2.38),$$

$$\mathcal{E}_{cp.осц.} = \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} = \frac{e^2 E_0^2 \lambda^2}{16\pi^2 mc^2} \quad (2.39)$$

$$X_0 = \frac{eE_0}{m\omega^2} = \frac{eE_0 \lambda^2}{4\pi^2 mc^2} \quad (2.40).$$

Важно для проведения расчетов уметь правильно вычислять значение амплитуды электрического поля по заданным значениям интенсивности I (среднее по периоду значение плотности мощности или плотности потока

энергии) СВЧ излучения, значение которой может быть рассчитано, исходя из измеряемых приборами величин полной мощности P СВЧ излучения. При известном пространственном распределении плотности мощности микроволн в волноводе или в свободном пространстве, можно рассчитать эффективную площадь S_{eff} , занятой СВЧ излучением.

Из курса электродинамики известно, что для плоской электромагнитной волны направленный поток энергии (вектор Пойнтинга) $\vec{P}$ выражается через векторы электрического и магнитного полей и скорость распространения волны c в виде:

$$\vec{P} = \frac{[\vec{E} \cdot \vec{H}]}{4\pi} \cdot c = \frac{\vec{k}}{|k|} \cdot \frac{E_0 \sin(\omega t - kz) \cdot H_0 \sin(\omega t - kz)}{4\pi} \cdot c \quad (2.41),$$

здесь $\frac{\vec{k}}{|k|}$ – единичный вектор, параллельный волновому вектору и совпадающий с ортом $\vec{e}_z$ вдоль оси OZ .

Принимая во внимание, что в гауссовой системе $|E_0| = |H_0|$, усреднение по периоду СВЧ поля величины вектора Пойнтинга дает значение $\langle \sin^2(\omega t - kz) \rangle = 1/2$, получим выражение для интенсивности I электромагнитной волны, выраженной через амплитуду электрической компоненты СВЧ поля E_0 :

$$\langle \vec{P} \rangle = I = \frac{E_0^2}{8\pi} \cdot c \quad (2.42).$$

Отметим, что связь интенсивности I и амплитуды поля E_0 не зависит от частоты поля или длины волны СВЧ излучения.

Выражая из (2.42) величину амплитуды электрической компоненты СВЧ поля через интенсивность, получим выражение:

$$E_0 = \sqrt{\frac{8\pi I}{c}} \quad (2.43).$$

Учитывая (2.43), формулы (2.38), (2.39) и (2.40) можно переписать, выражая величины скорости, энергии и амплитуды осцилляции через интенсивность I и длину волны λ в виде:

$$V_0 = \frac{eE_0}{m\omega} = \frac{eE_0\lambda}{2\pi mc} = \frac{e\lambda\sqrt{\frac{8\pi I}{c}}}{2\pi mc} = \frac{e\lambda}{m} \sqrt{\frac{2I}{\pi c^3}} \quad (2.44),$$

$$\mathcal{E}_{cp} = \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} = \frac{e^2 E_0^2 \lambda^2}{16\pi^2 mc^2} = \frac{e^2 \lambda^2 I}{2\pi mc^3} \quad (2.45)$$

$$X_0 = \frac{eE_0}{m\omega^2} = \frac{eE_0\lambda^2}{4\pi^2 mc^2} = \frac{e\lambda^2}{\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}} mc^{\frac{5}{2}}} \sqrt{I} \quad (2.46).$$

Таким образом, из (2.44 – 2.46) видно, что величина амплитуды осцилляторной скорости пропорциональна длине волны λ СВЧ излучения корню квадратному из интенсивности $\sqrt{I}$, а средняя осцилляторная энергия пропорциональна квадрату длины волны λ^2 и интенсивности I , а амплитуда осцилляции электрона пропорциональна квадрату длины волны λ^2 и корню квадратному из интенсивности $\sqrt{I}$.

Приведенные формулы записаны для гауссовой системы единиц. В технике и экспериментальной физике широко применяются одновременно как единицы измерения Гауссовой системы (см, г, см/с, с), так и единицы измерения системы СИ (Дж, Вт, В/м), а также внесистемные единицы (Вт/см², В/см, эВ). В связи с этим целесообразно для расчетов преобразовать некоторые формулы в удобный для применения в реальных экспериментах вид с использованием как системных, так и внесистемных единиц измерений. Необходимо при этом учитывать, что скорость света выражается в гауссовой системе $c=3\cdot 10^{10}$ см/с, заряд электрона $e=4.8\cdot 10^{-10}$ (CGSE), масса электрона $m=9.1\cdot 10^{-28}$ г. В Гауссовой системе интенсивность I должна быть выражена в гауссовых единицах эрг/см²с, тогда и величина электрического поля будет

выражаться также в гауссовых единицах. Напомним коэффициенты пересчета некоторых единиц измерений из гауссовой системы в СИ: для энергетических единиц типа I в гауссовой системе $I(\text{гаусс})=10^7 \cdot I(\text{Вт/см}^2)$, для электрического поля $E(\text{гаусс}) \cdot 300 = E(\text{В/см})$, для пересчета энергии из эрг во внесистемную единицу эВ необходимо учитывать коэффициент пересчета $1.6 \cdot 10^{-12}$ эрг/эВ. Тогда получим следующие выражения:

$$E_0(\text{В/см}) \approx 27.45 \cdot \sqrt{I(\text{Вт/см}^2)} \quad (2.47),$$

$$V_0(\text{см/с}) \approx 0.256 \cdot 10^6 \lambda_{\text{см}} \sqrt{I(\text{Вт/см}^2)} \quad (2.48),$$

$$\mathcal{E}_{cp}(\text{эВ}) \approx 9.33 \cdot 10^{-6} (\lambda_{\text{см}})^2 I(\text{Вт/см}^2) \quad (2.49),$$

$$X_0(\text{см}) \approx 1.36 \cdot 10^{-6} (\lambda_{\text{см}})^2 \sqrt{I(\text{Вт/см}^2)} \quad (2.50).$$

Для того чтобы оценить масштаб величин, характеризующих движение электрона в СВЧ поле, рассмотрим несколько задач.

Задача 2.1

Рассчитать величины круговой ω и линейной f частот осцилляции поля, периода T , амплитуды осцилляторной скорости V_0 , амплитуды осцилляции X_0 и средней осцилляторной энергии $\mathcal{E}_{cp}$, характеризующие движение электрона в потоке СВЧ излучения с длиной волны $\lambda=16$ см при интенсивности 10 кВт/см^2 .

Решение

Для оценки этих величин воспользуемся формулами (2.20), (2.47)–(2.50).

$$\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda} \approx 1.18 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1} \quad f = \frac{c}{\lambda} \approx 1.88 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$$

$$T = 2\pi \frac{1}{\omega} \approx 5.32 \cdot 10^{-10} \text{ с} = 0.53 \text{ нс}$$

$$E_0 \approx 27.45 \sqrt{I(\text{Вт/см}^2)} \approx 2745 \text{ В/см}$$

$$V_0(\text{см/с}) \approx 0.256 \cdot 10^6 \lambda_{\text{см}} \sqrt{I(\text{Вт/см}^2)} \approx 4.1 \cdot 10^8 \text{ см/с}$$

$$\mathcal{E}_{\text{ср.осц.}}(\text{эВ}) \approx 9.33 \cdot 10^{-6} (\lambda_{\text{см}})^2 I(\text{Вт/см}^2) \approx 24 \text{ эВ}$$

$$X_0(\text{см}) \approx 1.36 \cdot 10^{-6} (\lambda_{\text{см}})^2 \sqrt{I(\text{Вт/см}^2)} \approx 0.035 \text{ см} = 350 \text{ мкм.}$$

Средняя энергия осцилляции электрона в СВЧ поле составляет величину 24 эВ, а максимальная энергия в отсутствие столкновений и сбоя фазы может достигать значения в два раза больше, т.е. 48 эВ. Можно убедиться из формулы (2.31), что с учетом начальной фазы рождения электрона в СВЧ поле максимальное значение осцилляторной энергии может в 8 раз превосходить среднюю энергию осцилляции, т.е. достигать величины 192 эВ. Энергия электронов в современных ускорителях, существенно превосходит эту осцилляторную энергию при интенсивности СВЧ излучения всего 10 кВт/см², но если сравнить максимально возможную энергию осцилляции 192 эВ с характерной энергией для ионизации атомов и молекул газов, или с характерной энергией связи электрона в конденсированных веществах, то эта осцилляторная энергия оказывается достаточной для однократной, а в ряде случаев, и для двукратной ионизации практически большинства атомов и молекул, а также для возбуждения многих конденсированных веществ.

Характерные значения энергии однократной и двукратной ионизации ряда атомов и величины характерных энергий возбуждения некоторых кристаллов и материалов представлены в таблицах 2.1 и 2.2:

Из приведенных в таблицах 2.1 и 2.2 данных видно, что в СВЧ поле с умеренным значением интенсивности и с довольно большой длиной волны (т.е. довольно низкой частоты) осцилляторные энергии могут достигать столь больших значений, при которых может происходить как однократная, так и двукратная ионизация многих атомов, а также электронное возбуждение и

вторичная электронная эмиссия из некоторых кристаллов и полимеров. При этом энергия кванта СВЧ излучения с длиной волны $\lambda=16\text{см}$ оказывается на много порядков меньше в сравнении с осцилляторной энергией электрона:

$$hf=hc/\lambda \approx 6.6262 \cdot 10^{-27} (\text{эрг-с}) \cdot 3 \cdot 10^{10} / 16 \approx 1.24 \cdot 10^{-17} (\text{эрг}) \approx 0.78 \cdot 10^{-5} (\text{эВ}).$$

Таблица 2.1. Значения энергии однократной и двукратной ионизации для некоторых атомов:

Атом (символ)	Энергия однократной ионизации (эВ)	Энергия двукратной ионизации (эВ)
Водород (H)	13.595	
Гелий (He)	24.58	54.4
Литий (Li)	5.39	75.619
Бериллий (Be)	9.32	18.206
Углерод (C)	11.264	25.149
Азот (N)	14.54	24.376
Кислород (O)	13.614	29.605
Фтор (F)	17.418	35.146
Неон (Ne)	21.559	49.07
Натрий (Na)	5.138	47.29
Алюминий (Al)	5.984	18.823
Кремний (Si)	8.149	16.34

Таблица 2.2. Значения характерных энергий для возбуждения некоторых кристаллов и твердых материалов.

Кристалл/материал	Энергия, характеризующая энергетическую структуру материала (запрещенная зона), эВ	Характерная энергия соударения электронов с поверхностью материала, при которой коэффициент вторичной электронной эмиссии (КВЭЭ) равен 1, эВ
Монокристаллический фторид лития (LiF)	13	14
Монокристаллический хлорид натрия (NaCl)	8	18
Тефлон (фторопласт 4)		24

Задача 2.2

Рассчитать величину электрической компоненты поля, осцилляторную энергию электрона в потоке лазерного излучения длиной волны 0.25 мкм (4-я гармоника неодимового лазера) при интенсивности 10^{12} Вт/см².

Решение

Воспользуемся формулами (2.47) – (2.50) и получим следующие числовые значения параметров:

$$E_0 \approx 27.45 \cdot \sqrt{I(\text{Вт/см}^2)} \approx 2.745 \cdot 10^7 \text{ В/см}$$

$$\mathcal{E}_{\text{ср.осц.}}(\text{эВ}) \approx 9.33 \cdot 10^{-6} (\lambda_{\text{см}})^2 I(\text{Вт/см}^2) \approx 0.0058 \text{ эВ.}$$

$$V_0(\text{см/с}) \approx 0.256 \cdot 10^6 \lambda_{\text{см}} \sqrt{I(\text{Вт/см}^2)} \approx 6.4 \cdot 10^6 \text{ см/с}$$

$$X_0(\text{см}) \approx 1.36 \cdot 10^{-6} (\lambda_{\text{см}})^2 \sqrt{I(\text{Вт/см}^2)} \approx 0.085 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 0.0085 \cdot \text{нм.}$$

Сравним энергию осцилляции электрона в этом лазерном поле с энергией кванта лазерного излучения, рассчитанную по формуле Планка:

$$\hbar \omega = \hbar \frac{2\pi c}{\lambda} = hf \approx 6.6262 \cdot 10^{-27} (\text{эрг-с}) \cdot 3 \cdot 10^{10} / 0.25 \text{ см} \approx 0.79 \cdot 10^{-11} (\text{эрг}) \approx 4.9 \text{ эВ,}$$

что приблизительно в 840 раз больше средней энергии осцилляции электрона в поле лазерного излучения.

Из сравнения результатов расчетов задач 2.1 и 2.2 наглядно видна роль длины волны излучения (частоты колебаний электромагнитного поля) для набора энергии электроном в осциллирующем электрическом поле. Это чисто классический эффект, обусловленный тем, что электрон взаимодействует сразу со многими квантами электромагнитного поля. В поле излучения дециметрового диапазона длин волн энергия каждого кванта мала (для параметров задачи это $0.78 \cdot 10^{-5}$ эВ), но средняя осцилляторная энергия 24 эВ, получаемая электроном в СВЧ поле, оказывается велика в сравнении с энергией кванта. В потоке лазерного излучения, ситуация обратная: энергия кванта велика (4.9 эВ), но средняя осцилляторная энергия электрона очень мала (0.0058 эВ) в сравнении с энергией кванта.

В настоящее время в ведущих мировых научных центрах имеются лазеры с очень высокой интенсивностью излучения $\sim 10^{20}$ Вт/см² с длиной волны излучения около 1 мкм. При таких интенсивностях лазерного излучения энергия осцилляции составляет гигантскую величину ~ 0.58 МэВ, т.е. уже превышает энергию покоя электрона 0.511 МэВ, но при этом характер движение электрона сильно изменяется. При таких гигантских интенсивностях рассмотрение взаимодействия заряженных частиц с лазерным излучением должно быть проведено уже с учетом сильных релятивистских эффектов, существенно изменяющих характер движения частиц.

Задача 2.3

Рассчитать траекторию электрона в нерелятивистской СВЧ волне с учетом как электрической, так и магнитной компонент.

Решение

Электрическую и магнитную компоненты СВЧ волны запишем в виде:

$$\begin{aligned}\vec{E}(t) &= \vec{e}_x E_x(t) = \vec{e}_x E_0 \sin(\omega t - kz) \\ \vec{H}(t) &= \vec{e}_y H_y(t) = \vec{e}_y H_0 \sin(\omega t - kz)\end{aligned}$$

Выражение для силы, действующей на электрон в полях СВЧ волны, будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -e\vec{E}(t) - \frac{e}{c} [\vec{V} \times \vec{H}] = -e\vec{E}(t) - \frac{e}{c} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ V_x & V_y & V_z \\ 0 & H_y(t) & 0 \end{vmatrix} = \left\{ -e\vec{E}(t) + \frac{e}{c} V_z H_y(t); 0; -\frac{e}{c} V_x H_y(t) \right\} \\ \vec{F} &= \left\{ -eE_0 \sin(\omega t - kz) + \frac{e}{c} V_z H_0 \sin(\omega t - kz); 0; -\frac{e}{c} V_x H_0 \sin(\omega t - kz) \right\}\end{aligned}$$

Уравнения движения электрона, находящегося в электромагнитном поле СВЧ волны, представляются в виде:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -e E_0 \sin(\omega t - kz) + \frac{e}{c} V_z H_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{e}{c} V_x H_0 \sin(\omega t - kz)$$

Учтем, что электрическая и магнитная компоненты полей в бегущей СВЧ волне осциллируют синхронно, а в Гауссовой системе выражения для величины амплитуды электрической компоненты E_0 совпадает с величиной амплитуды магнитной компоненты H_0 (2.24):

$$E_x(t) = E_0 \sin(\omega t - kz) = H_y(t) = H_0 \sin(\omega t - kz)$$

Учитывая это, получим уравнения движения электрона в виде:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -e E_0 \sin(\omega t - kz) + \frac{e}{c} V_z E_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{e}{c} V_x E_0 \sin(\omega t - kz)$$

Доминирующая сила, действующая на электрон по оси OX , связана с электрической компонентой СВЧ поля $-e E_0 \sin(\omega t - kz)$. Соответственно и скорость электрона V_x по оси OX будет определяться этой доминирующей силой, и величина этой скорости будет существенно большей по сравнению со скоростями по другим осям OY и OZ .

В правой части уравнения движения электрона по оси OZ стоит отношение скорости электрона V_x по оси OX к скорости света c , и это движение мы будем учитывать. В то же время скорость V_z по оси OZ будет

мала по сравнению со скоростью V_x , но ее будем также учитывать. Не ограничивая общности рассмотрения, можно показать, что kz в выражении для фазы волны $(\omega t - kz)$ также является малой по сравнению с ωt даже для момента времени равного периоду T осцилляции поля в волне. Для этого вычислим скорость и координату электрона по оси OZ , и оценим величину kz для момента времени $t = T$:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{e}{mc} V_x E_0 \sin(\omega t - kz), \text{ где } V_x \approx \frac{e E_0}{m \omega} \cos(\omega t - kz) \leq \frac{e E_0}{m \omega} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &\approx -\frac{e}{mc} \frac{e E_0}{m \omega} E_0 \sin(\omega t - kz) \\ \frac{dz}{dt} &\approx \frac{e}{m \omega c} \frac{e E_0}{m \omega} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ z &\approx -\frac{e}{m \omega^2 c} \frac{e E_0}{m \omega} E_0 \sin(\omega t - kz); \\ kz = \frac{\omega}{c} z &\leq \frac{e E_0}{m \omega c} \frac{e E_0}{m \omega c} \sin(\omega t - kz) \leq \left[\frac{e E_0}{m \omega c} \right]^2 \ll 1 \\ \min \left\{ \omega t = \frac{2\pi}{T} t \right\} &= \frac{2\pi}{T} T = 2\pi\end{aligned}$$

Таким образом, будем рассматривать уравнения движения электрона в волне только по осям OX и OZ , и, исходя из приведенных оценок, заменим выражение для фазы волны $(\omega t - kz)$ на (ωt) . Также скорости представим в виде производных по времени от координат электрона. Тогда получим следующую упрощенную систему уравнений:

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 x}{dt^2} &\approx -e E_0 \sin(\omega t) - \frac{e}{c} \frac{dz}{dt} E_0 \sin(\omega t) \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &\approx -\frac{e}{c} \frac{dx}{dt} E_0 \sin(\omega t)\end{aligned}$$

В правой части первого уравнения первый член существенно больше второго, поэтому можно приближенно вычислить скорость и координату

электрона по оси OX , принимая во внимание в правой части только первый член, тогда получим:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{e}{m\omega} E_0 \cos(\omega t)$$

$$x(t) \approx \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(\omega t)$$

Подставляем выражение для приближенной скорости электрона по оси OX во второе уравнение, определяющее характер движения электрона по оси OZ , и получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{e}{c} \frac{1}{m} \frac{dx}{dt} E_0 \sin(\omega t) \approx -\frac{e^2 E_0^2}{m^2 \omega c} \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

Далее вычисляем скорость и координату электрона при его движении по оси OZ , интегрируя выше приведенное уравнение:

$$\frac{dz}{dt} \approx -\frac{e^2 E_0^2}{m^2 \omega c} \int dt \cos(\omega t) \sin(\omega t) = \frac{e^2 E_0^2}{4m^2 \omega^2 c} \cos(2\omega t) = \frac{eE_0}{4m\omega c} \frac{eE_0}{m\omega} \cos(2\omega t)$$

$$z(t) \approx \frac{e^2 E_0^2}{4m^2 \omega^2 c} \int dt \cos(2\omega t) = \frac{e^2 E_0^2}{8m^2 \omega^3 c} \sin(2\omega t) = \frac{eE_0}{8m\omega c} \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(2\omega t)$$

Таким образом, координаты электрона в СВЧ поле в плоскости XZ в зависимости от времени имеют вид:

$$x(t) \approx \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(\omega t)$$

$$z(t) \approx \frac{eE_0}{8m\omega c} \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(2\omega t) = \alpha \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(2\omega t)$$

$$\alpha = \frac{eE_0}{8m\omega c} \ll 1$$

Из этих выражений видно, что амплитуда осцилляции электрона по оси OX существенно больше амплитуды осцилляции по оси OZ , т.к. в выражении для $z(t)$ амплитуда осцилляции имеет малый параметр α . При этом по оси OZ электрон осциллирует с удвоенной частотой по сравнению с частотой осцилляции электрона по оси OX . Траектория электрона в

плоскости XZ представлена на рис. 2.1. Таким образом, в нерелятивистском случае установлено, что электрон в полях СВЧ волны, совершает осциллирующее движение с траекторией в виде вытянутой вдоль электрического поля восьмерки в плоскости XZ , в которой располагаются вектор электрического поля и волновой вектор СВЧ волны. При этом амплитуда осцилляции по оси, коллинеарной электрическому СВЧ полю, существенно превосходит амплитуду осцилляций в направлении волнового СВЧ волны. Соотношение амплитуд осцилляций определяется релятивистским фактором – отношением осцилляторной скорости к скорости света, умноженной на 8. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении движения электрона в нерелятивистском СВЧ поле мы будем пренебрегать осцилляциями, обусловленными собственной магнитной компонентой СВЧ волны. Это важно только тогда, когда осцилляторные скорости малы по сравнению со скоростью света. В полях лазерного излучения нерелятивистской интенсивности траектория электрона будет аналогична.

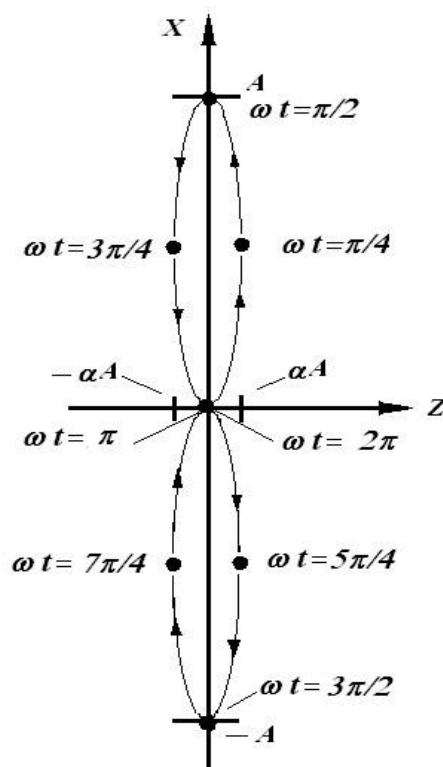


Рис. 2.1. Траектория движения электрона в электрическом и магнитном полях СВЧ волны в плоскости XZ . Электрическая компонента поля $E_0 \sin(\omega t)$ коллинеарна оси OX , магнитная компонента коллинеарна оси OY , амплитуда осцилляции по оси OX равна $A = eE_0/m\omega^2$, амплитуда осцилляции по оси OZ существенно меньше и равна αA , где $\alpha = eE_0/8m\omega c$. Точками показаны положения электрона на траектории типа «восьмерка» для различных значений фазы СВЧ поля $\omega t = 0; \pi/4; \pi/2; 3\pi/4; \pi; 5\pi/4; 3\pi/2; 7\pi/4; 2\pi$.

Лекция 3. Движение электронов в однородном импульсном СВЧ поле в отсутствии столкновений

В предыдущей лекции рассматривалось движение электронов в потоке СВЧ излучения непрерывного во времени. В данной лекции мы будем рассматривать движение электронов в импульсном осциллирующем электрическом поле с меняющейся амплитудой во времени. Как правило, имеют дело с импульсом СВЧ или лазерного поля, который имеет нарастающий передний фронт, основное «тело» импульса со слабо меняющейся амплитудой поля и спадающий задний фронт импульса. Этот случай близок к условиям экспериментов, в которых имеют дело с приборами, генерирующими импульсное СВЧ излучение – магнетронами, гиротронами, клистронами и др. Для этих широко распространенных источников импульсного СВЧ излучения передний и задний фронты импульсов, как правило, имеют длительность в несколько десятков или сотен периодов поля, область плато может быть как короткой в несколько сотен периодов поля, так длинной в несколько тысяч и даже миллионов периодов. Так, например, у современных гиротронов, предназначенных для нагрев плазмы в установке международного проекта *ITER* длительность плато импульса должна составлять не менее 1000 секунд, т.е. для СВЧ излучения с линейной частотой около 200 ГГц длительность плато составляет $5 \cdot 10^6$ периодов поля. В то же время для аттосекундных ($1 \text{ ас} = 10^{-18} \text{ с}$) импульсов рентгеновского излучения длиной волны 10 нм, генерируемых в плазме при воздействии мощных лазеров с фемтосекундной длительностью импульса, длительность всего импульса составляет около 10 ас, при величине периода поля около 3 ас.

Цель дальнейших рассмотрений в этой лекции состоит в расчете энергии электронов, которую они набирают в отсутствии столкновений при взаимодействии с СВЧ импульсом с конечным по величине «телом»

импульса, а также с его реальными значениями переднего и заднего фронтами.

Основываясь на лекции 2, выражение для осциллирующего электрического поля с меняющейся во времени амплитудой в потоке СВЧ излучения может быть записано в общем виде так:

$$E_x(t) = E(t) \sin(\omega t) \quad (3.1),$$

здесь $E(t)$ – уже медленно изменяющаяся во времени амплитуда электрической компоненты СВЧ поля или огибающая СВЧ импульса, ω – круговая частота СВЧ поля ($\omega = 2\pi f = 2\pi c/\lambda$, f – линейная частота поля, $f = 1/T$, T – период колебаний СВЧ поля, λ – длина волны, c – скорость света в вакууме).

Рассмотрим свободный электрон с зарядом $-e$ и массой m в вакууме, на который воздействует СВЧ поле с круговой частотой ω и изменяющейся во времени амплитудой электрического поля.

Для простоты примем, что огибающая импульса СВЧ поля имеет во времени трапецеидальную форму, т.е. линейно нарастающий передний фронт во времени t_{nf} от нулевого значения до максимального E_0 , длительность «плато» импульса τ СВЧ поля с постоянным значением амплитуды E_0 , и линейно спадающий во времени задний фронт t_{zf} от E_0 до нуля. Эти условия могут быть записаны в виде следующего выражения для электрического поля:

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_0 \frac{t}{t_{nf}} \sin(\omega t) && \text{интервал (A): } 0 < t < t_{nf} \\ E_x(t) &= E_0 \sin(\omega t) && \text{интервал (B): } t_{nf} < t < t_{nf} + \tau \\ E_x(t) &= E_0 \frac{t_{nf} + \tau + t_{zf} - t}{t_{zf}} \sin(\omega t) && \text{интервал (C): } t_{nf} + \tau < t < t_{nf} + \tau + t_{zf} \end{aligned} \quad (3.2).$$

Здесь величина E_0 является амплитудой электрического поля волны в интервале (В). Вне указанных интервалов полагаем значение электрического поля равным нулю (рис. 3.1.)

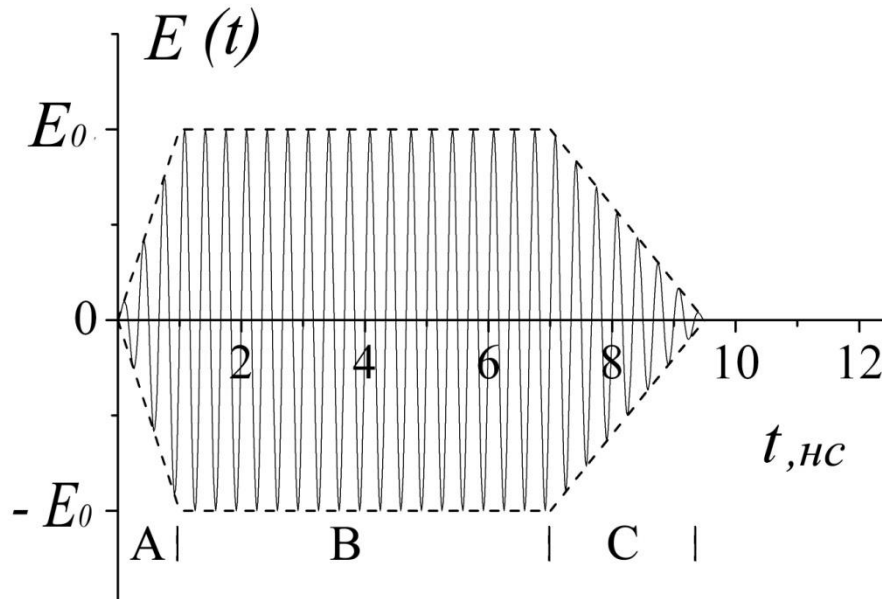


Рис. 3.1. Пример изображения типичной осциллограммы импульса СВЧ излучения, описываемого формулой (3.2). Линейная частота СВЧ колебаний $f = 3$ ГГц, период $T \approx 0.33$ нс, $t_{n\phi} = 1$ нс, $t_{з\phi} = 2.5$ нс, $\tau = 6$ нс. Временные интервалы: $A = [0; t_{n\phi}]$; $B = [t_{n\phi}; t_{n\phi} + \tau]$; $C = [t_{n\phi} + \tau; t_{n\phi} + \tau + t_{з\phi}]$

Уравнение, описывающее нерелятивистское движение электронов (действием магнитной компоненты СВЧ поля пренебрегаем) вдоль оси Ox во времени в импульсном электрическом поле электромагнитной волны будет иметь вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -e E_x(t) \sin \omega t \quad (3.3).$$

Будем решать уравнение (3.3) для различных временных интервалов и, далее, производить математическую операцию «сшивки» на границах интервалов.

Для интервала (А) уравнение 3.3. примет конкретный вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -e E_0 \frac{t}{t_{n\phi}} \sin(\omega t) \quad (3.4).$$

Для нахождения зависимости скорости частицы от времени t в СВЧ поле проинтегрируем по времени уравнение (3.4):

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{dx}{dt} = -\frac{eE_0}{mt_{n\phi}} (-1) \int \frac{t}{\omega} d[\cos(\omega t)] = \\ &= \frac{eE_0}{m\omega} \frac{1}{t_{n\phi}} \{t \cos(\omega t) - \int dt [\cos(\omega t)]\} = \\ &= \frac{eE_0}{m\omega} \frac{t}{t_{n\phi}} \cos(\omega t) - \frac{eE_0}{m\omega} \frac{1}{\omega t_{n\phi}} \sin(\omega t) + C_1 \end{aligned} \quad (3.5),$$

где C_1 – постоянная, которую можно найти из начальных условий: электрон в начальный момент имел нулевую скорость вдоль оси OX , т.е. при $t=0$, $V(0)=0$; $\frac{dx}{dt}(t=0)=0$. Тогда получаем следующее соотношение для

нахождения константы C_1 : $-\frac{eE_0}{m\omega} \cdot \frac{1}{\omega t_{n\phi}} \sin(0) + C_1 = 0$, откуда следует, что $C_1 = 0$.

Окончательно получаем выражение для скорости $V(t)$ электрона во временном интервале (A) $0 \leq t \leq t_{n\phi}$:

$$V(t) = \frac{eE_0}{m\omega} \cdot \frac{t}{t_{n\phi}} \cos(\omega t) - \frac{eE_0}{m\omega} \cdot \frac{1}{\omega t_{n\phi}} \sin(\omega t) \quad (3.6).$$

Рассмотрим временной интервал (B) $t_{n\phi} \leq t \leq t_{n\phi} + \tau$. Уравнение движения электрона для этого интервала представляется в виде:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -eE_x(t) = -\frac{eE_0}{m} \sin(\omega t) \quad (3.7).$$

Однократным интегрированием находим выражение для скорости электрона:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t) + C_2 \quad (3.8)$$

Для определения постоянной C_2 проводим операцию «сшивки» решения (3.6), полученного для интервала (А), и решения (3.8), полученного для интервала (В), для момента времени $t=t_{n\phi}$.

$$\begin{aligned} V(t_{n\phi}) &= \frac{eE_0}{m\omega} \cdot \frac{t_{n\phi}}{t_{n\phi}} \cos(\omega t_{n\phi}) - \frac{eE_0}{m\omega} \cdot \frac{1}{\omega t_{n\phi}} \sin(\omega t_{n\phi}) = \\ &= \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t_{n\phi}) + C_2; \quad C_2 = -\frac{eE_0}{m\omega} \left[\frac{\sin(\omega t_{n\phi})}{\omega t_{n\phi}} \right]. \end{aligned}$$

Окончательно выражение для скорости электрона во временном интервале (В) $t_{n\phi} \leq t \leq t_{n\phi} + \tau$ получаем в виде:

$$\frac{dx}{dt} = V(t) = \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t) - \frac{eE_0}{m\omega} \left[\frac{\sin(\omega t_{n\phi})}{\omega t_{n\phi}} \right] \quad (3.9).$$

Здесь уместно сравнить эту формулу для скорости электрона (3.9) с формулой (2.31), в которой представлено выражение для скорости электрона в СВЧ импульсе с резким фронтом, равным четверти периода, при этом возникает две компоненты скорости – осциллирующая и постоянная. Из (3.9) видно, что в импульсе с плавным фронтом $\omega t_{n\phi} \ll 1$ существенна только осциллирующая компонента, а постоянная скорость, обусловленная начальной фазой СВЧ поля, практически не играет роли.

Рассмотрим временной интервал (С): $t_{n\phi} + \tau \leq t \leq t_{n\phi} + \tau + t_{3\phi}$. Уравнение движения электрона для этого интервала представляется в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -eE_x(t) = -\frac{eE_0}{m} \left[\frac{t_{n\phi} + \tau + t_{3\phi} - t}{t_{3\phi}} \right] \sin(\omega t) \quad (10).$$

Для упрощения выражений введем обозначения:

$$\frac{t_{n\phi} + \tau + t_{3\phi}}{t_{3\phi}} = b \quad (3.11),$$

$$\frac{1}{t_{3\phi}} = a \quad (3.12).$$

С учетом введенных обозначений, уравнение движения электрона в поле СВЧ излучения во временном интервале (С) получит вид:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{eE_0}{m} \cdot [b - at] \cdot \sin(\omega t) = \\ &= -\frac{eE_0}{m} b \cdot \sin(\omega t) + \frac{eE_0}{m} at \cdot \sin(\omega t)\end{aligned}\quad (3.13).$$

Путем однократного интегрирования по времени выражения (3.13) получаем выражение для скорости электрона во временном интервале (С):

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{eE_0}{m\omega} b \cos(\omega t) + \frac{eE_0}{m} a \int t \sin(\omega t) dt \quad (3.14).$$

Далее вычислим отдельно интеграл во втором члене выражения (3.14):

$$\begin{aligned}\int t \sin(\omega t) dt &= -\int \frac{t}{\omega} d[\cos(\omega t)] = -\frac{t}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \int \cos(\omega t) dt = \\ &= -\frac{t}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega^2} \sin(\omega t)\end{aligned}\quad (3.15).$$

Подставляя выражение для интеграла (3.15) в выражение (3.14) получаем выражение для скорости электрона во временном интервале (С) в виде:

$$V(t) = \frac{eE_0}{m\omega} b \cos(\omega t) - \frac{eE_0}{m\omega} at \cos(\omega t) + \frac{eE_0}{m\omega^2} a \sin(\omega t) + C_4 \quad (3.16)$$

Проводим сшивку решений для интервала (С) (3.16) и интервала (В) (3.9) для момента времени $t = t_{n\phi} + \tau$:

$$\begin{aligned}V(t_{n\phi} + \tau) &= \frac{eE_0}{m\omega} b \cos(\omega t_{n\phi} + \omega \tau) - \frac{eE_0}{m\omega} a \cdot (t_{n\phi} + \tau) \cos(\omega t_{n\phi} + \omega \tau) + \\ &+ \frac{eE_0}{m\omega^2} a \sin(\omega t_{n\phi} + \omega \tau) + C_4 = \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t_{n\phi} + \omega \tau) - \frac{eE_0}{m\omega} \left[\frac{\sin(\omega t_{n\phi})}{\omega t_{n\phi}} \right]\end{aligned}$$

Учитывая обозначения для a (3.12) и b (3.11) получим выражение для C_4 в виде:

$$C_4 = -\frac{eE_0}{m\omega} \cdot \frac{\sin(\omega t_{n\phi})}{\omega t_{n\phi}} - \frac{eE_0}{m\omega} \cdot \frac{\sin(\omega t_{n\phi} + \omega \tau)}{\omega t_{3\phi}} \quad (3.17).$$

С учетом выражения (3.17) окончательно получим выражение для скорости во временном интервале (С) в виде:

$$V(t) = \frac{eE_0}{m\omega} \frac{t_{n\phi} + \tau + t_{з\phi}}{t_{з\phi}} \cos(\omega t) - \frac{eE_0}{m\omega} \frac{t}{t_{з\phi}} \cos(\omega t) + \frac{eE_0}{m\omega} \frac{\sin(\omega t)}{\omega t_{з\phi}} - \frac{eE_0}{m\omega} \frac{\sin(\omega t_{n\phi})}{\omega t_{n\phi}} - \frac{eE_0}{m\omega} \frac{\sin(\omega t_{n\phi} + \omega \tau)}{\omega t_{з\phi}} \quad (3.18)$$

Рассчитаем осцилляторную скорость электрона в конце СВЧ импульса, т.е. в момент времени $t^* = t_{n\phi} + \tau + t_{з\phi}$:

$$V(t^*) = \frac{eE_0}{m\omega} \cdot \frac{t_{n\phi} + \tau + t_{з\phi}}{t_{з\phi}} \cos(\omega t_{n\phi} + \omega \tau + \omega t_{з\phi}) - \frac{eE_0}{m\omega} \cdot \frac{t_{n\phi} + \tau + t_{з\phi}}{t_{з\phi}} \cos(\omega t_{n\phi} + \omega \tau + \omega t_{з\phi}) + \frac{eE_0}{m\omega} \cdot \frac{\sin(\omega t_{n\phi} + \omega \tau + \omega t_{з\phi})}{\omega t_{з\phi}} - \frac{eE_0}{m\omega} \cdot \frac{\sin(\omega t_{n\phi})}{\omega t_{n\phi}} - \frac{eE_0}{m\omega} \cdot \frac{\sin(\omega t_{n\phi} + \omega \tau)}{\omega t_{з\phi}} \quad (3.19).$$

Видно, что в (3.19) первый и второй члены взаимно уничтожаются, а остальные члены преобразуются в выражение:

$$V_e(t^*) = \frac{eE_0}{m\omega} \cdot \left[\frac{\sin(\omega t_{n\phi} + \omega \tau + \omega t_{з\phi})}{\omega t_{з\phi}} - \frac{\sin(\omega t_{n\phi})}{\omega t_{n\phi}} - \frac{\sin(\omega t_{n\phi} + \omega \tau)}{\omega t_{з\phi}} \right] \quad (3.20)$$

Проанализируем выражение (3.20) с целью выяснения возможности получения электронами энергии от СВЧ поля и ее сохранения после прохождения СВЧ импульса. Рассмотрим несколько вариантов соотношения времен $t_{n\phi}$, $t_{з\phi}$, τ , и, соответствующих параметров $\omega t_{n\phi}$, $\omega t_{з\phi}$, $\omega \tau$.

Вариант 1. Соотношение параметров: $t_{n\phi} \approx t_{з\phi} \gg T$; $\omega t_{n\phi} \approx \omega t_{з\phi} \gg 2\pi$, что соответствует тому, что передний и задний фронты импульса СВЧ излучения существенно превосходят период поля. Для этого случая рассчитаем максимальную энергию, которую может приобрести в СВЧ поле электрон и сохранить ее после окончания импульса. Учитывая выражение для скорости (3.20) и, полагая значения всех тригонометрических функций равными 1, а величины фронтов такие как $\omega t_{n\phi} \approx \omega t_{з\phi} = 20\pi \gg 2\pi$, получим

выражение для максимальной энергии электрона в момент окончания СВЧ импульса:

$$\varepsilon_e \approx \max \left[\frac{mV_e^2(t^*)}{2} \right] \approx \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \frac{(3)^2}{(\omega t_{nf})^2} \approx \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \frac{(3)^2}{(20\pi)^2} \ll \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \quad (3.21).$$

Видно, что максимальная ожидаемая энергия электрона после окончания СВЧ импульса в случае длинных фронтов может иметь не нулевое значение, но это значение мало по сравнению с амплитудой осцилляторной энергией электрона, которую он имеет в течение действия плато СВЧ импульса.

Вариант 2. Передний фронт импульса минимально короткий $t_{nf} \approx T/4$ ($\omega t_{nf} \approx \pi/2$), задний фронт длинный $t_{zf} \gg T$, $\omega t_{zf} \gg 2\pi$. В этом случае максимальная энергия, полученная электроном к моменту окончания СВЧ импульса, может быть оценена так:

$$\varepsilon_e \approx \max \left[\frac{mV_e^2(t^*)}{2} \right] \approx \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \frac{8}{\pi^2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]^2 \approx \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \quad (3.22)$$

Таким образом, при коротком переднем фронте СВЧ импульса и длинном заднем фронте к моменту окончания импульса электроны могут иметь энергию, сравнимую со средней осцилляторной энергией, получаемой электроном в течение действия «плато» СВЧ импульса.

Вариант 3. Передний фронт импульса длинный $t_{nf} \gg T$ ($\omega t_{nf} \gg 2\pi$), задний фронт короткий $t_{zf} \approx T/4$ ($\omega t_{zf} \approx \pi/2$). Максимальная энергия, получаемая электроном к моменту окончания СВЧ импульса, может быть оценена как:

$$\begin{aligned}\varepsilon_e &\approx \max \left[\frac{mV^2(t^*)}{2} \right] \approx \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \cdot \max \left[\frac{[\sin(\omega t^*) - \sin(\omega t^* - \frac{\pi}{2})]^2}{\frac{\pi^2}{4}} \right] \approx \\ &\approx \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \max [\sin(\omega t^*) + \cos(\omega t^*)]^2 \approx \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \cdot \frac{16}{\pi^2} \approx 1.6 \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2}\end{aligned}\quad (3.23).$$

Из (3.23) видно, что при длинном переднем фронте и коротком заднем фронте СВЧ импульса после окончания этого импульса электроны могут получить энергию, близкую к средней осцилляторной энергии электрона в течение плато СВЧ импульса (результат, близкий к результату варианта 2).

Вариант 4. Соотношение параметров: $t_{n\phi} \approx t_{з\phi} \approx T/4$, $\omega t_{n\phi} \approx \omega t_{з\phi} \approx \pi/2$, что соответствует очень короткой длительности как переднего, так и заднего фронтов. Максимально возможная энергия электронов рассчитывается так:

$$\begin{aligned}\varepsilon_e &\approx \max \left[\frac{mV^2(t^*)}{2} \right] \approx \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \max \left[\frac{[\sin(\omega t^*) - \sin(\omega t^* - \omega t_{з\phi}) - \sin(\omega t_{n\phi})]^2}{\frac{\pi^2}{4}} \right] \approx \\ &\approx \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \max \left[\sin(\pi + \omega\tau) - \sin(\frac{\pi}{2} + \omega\tau) - \sin(\frac{\pi}{2}) \right]^2 \approx \\ &\approx \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \max [-\sin(\omega\tau) - \cos(\omega\tau) - 1]^2 \approx \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \cdot \frac{40}{\pi^2} \approx 4 \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2}\end{aligned}\quad (3.24)$$

Таким образом, из (3.24) видно, что при коротком переднем фронте и коротком заднем фронте СВЧ импульса в конце этого импульса электроны могут получить энергию, превышающую приблизительно в 4 раза среднюю осцилляторную энергию электрона, которую электрон имеет в течение плато СВЧ импульса.

Здесь следует сделать важное замечание, заключающееся в том, что мы предполагали существование гармонических регулярных колебаний СВЧ поля в процессе всего времени его взаимодействия с электронами. В СВЧ генераторах часто происходят сбои фазы колебаний, т.е. обрыв колебаний в течение короткого времени, соизмеримого по величине с четвертью периода $T/4$, и последующее возобновление колебаний с фронтом также около $T/4$.

Такие сбои колебаний СВЧ поля можно наблюдать с помощью современной высокоскоростной регистрирующей аппаратуры. При каждом таком срыве электроны могут получать энергию, которая уже не будет возвращаться СВЧ полю после окончания срыва и начала следующего цуга колебаний. Если в течение СВЧ импульса таких сбоев происходит много N , то после окончания действия такого СВЧ поля со сбоями электрон может обладать энергией в N раз большей энергии, описываемой формулой (3.24):

$$\varepsilon_e \approx 4N \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \quad (3.25).$$

Расчеты, выполненные выше, применимы не только для СВЧ диапазона длин волн, но и для импульсов лазерного излучения. Это будет продемонстрировано в задаче 3.1.

Задача 3.1

Рассчитать возможную максимальную энергию, получаемую электронами в результате прохождения импульса лазерного излучения с максимальной интенсивностью $I=10^{16}$ Вт/см², длиной волны $\lambda=1$ мкм, длительностью плато импульса $\tau=1$ пс, длительностью переднего фронта $\tau_{нф}=0.8$ фс, длительностью заднего фронта $\tau_{зф}=20$ фс.

Решение

Рассчитаем следующие параметры, характеризующие лазерный импульс:

$$\omega\tau_{нф} = \frac{2\pi c}{\lambda} \tau_{нф} \approx \frac{6.28 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{10^{-4}} \cdot 0.8 \cdot 10^{-15} \approx 1.5 \approx \frac{\pi}{2}$$

$$\omega\tau_{зф} = \frac{2\pi c}{\lambda} \tau_{зф} \approx \frac{6.28 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{10^{-4}} \cdot 20 \cdot 10^{-15} \approx 37.68 \gg 2\pi$$

Таким образом, параметры импульса таковы, что реализуется вариант 2, т.е. когда передний фронт импульса короткий, а задний фронт длинный. Возможная максимальная энергия электронов в этом случае близка к средней

осцилляторной энергии электрона во временном интервале (B), и может быть рассчитана по формуле (3.22):

$$\varepsilon_{e\max} \approx \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \approx \frac{Ie^2 \lambda^2}{2m\pi c^3} \approx \frac{1 \cdot 10^{16} \cdot 10^7 \cdot 23 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 3.14 \cdot 27 \cdot 10^{30} \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}} \approx 930 \text{ эВ}$$

Параметр длительности плато импульса $\tau = 1$ пс, вообще говоря, является избыточным для данной задачи. В других задачах при достаточно короткой длительности плато, сравнимой с периодом поля, длительность плато может быть существенным параметром для передачи энергии от осциллирующего поля электрону (см. задачу 3.2).

Задача 3.2.

Вывести формулу для энергии, которую набирают электроны при прохождении импульса плоской электромагнитной волны с круговой частотой осцилляции поля ω , с длительностью переднего и заднего фронтов равных четверти периода СВЧ поля $\frac{1}{4}T$, с длительностями плато импульса τ равного половине периода $\frac{T}{2}$ и целому периоду поля T . Величину электрического поля в волне принять равной E_0 .

Решение

Воспользуемся формулой (3.24) для энергии электрона в конце электромагнитного импульса с фронтами равными $\frac{T}{4}$ и длительностью плато $\tau_1 = \frac{T}{2}$, при этом $\omega\tau_{зф} = \omega\tau_{нф} = \frac{2\pi T}{4} = \frac{\pi}{2}$. Полная длительность импульса для первого случая составит величину $t^* = \frac{T}{4} + \frac{T}{4} + \frac{T}{2} = T$. Вид импульса представлен на рис. 3.2.

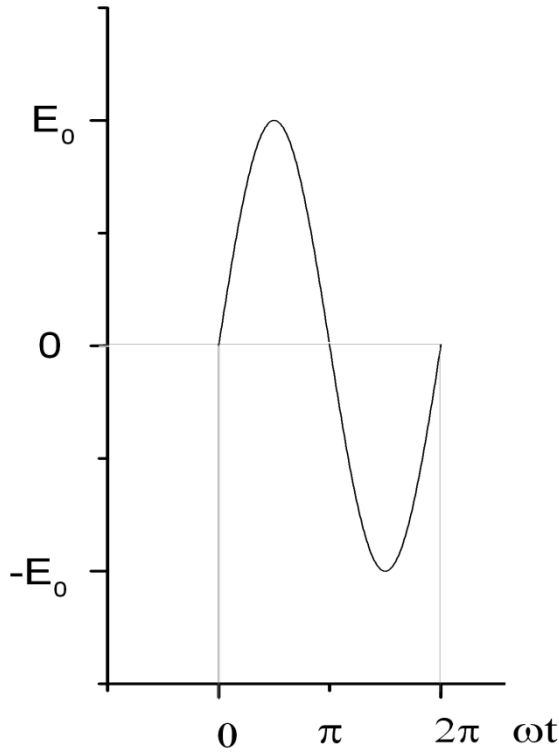


Рис. 3.2. Вид СВЧ импульса с передним и задним фронтами равными $0.25T$, при длительности «плато» импульса, равного $0.5T$.

Тогда из (3.24) получаем значение максимальной энергии в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_e &\approx \max \left[\frac{mV^2(t^*)}{2} \right] = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \cdot \max \left[\frac{\sin(\omega t^*) - \sin(\omega t^* - \omega t_{зф}) - \sin(\omega t_{нф})}{\frac{\pi^2}{4}} \right]^2 \approx \\ &= \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \max \left[\sin(2\pi) - \sin(2\pi - \frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{2}) \right]^2 = 0\end{aligned}$$

Таким образом, для первого случая, когда длительность плато импульса составляет половину периода СВЧ поля, электроны не получают энергию от импульса, несмотря на короткие фронты импульса $\frac{T}{4}$.

Для второго случая длительность плато составляет период поля $\tau_2 = T$ (рис. 3.3.), тогда полная длительность импульса для этого случая составит величину $t^* = \frac{T}{4} + \frac{T}{4} + T = \frac{3}{2}T$. Из формулы (3.24) получаем выражение для максимальной энергии электронов в таком импульсе в виде:

$$\varepsilon_e \approx \max \left[\frac{mV^2(t^*)}{2} \right] = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \cdot \max \left[\frac{\sin(\omega t^*) - \sin(\omega t^* - \omega t_{\text{зф}}) - \sin(\omega t_{\text{нф}})}{\frac{\pi^2}{4}} \right]^2 \approx$$

$$= \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \frac{8}{\pi^2} \cdot \max \left[\sin(3\pi) - \sin(3\pi - \frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{2}) \right]^2 = \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \frac{8}{\pi^2} \cdot 4 \approx 3.24 \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2}$$

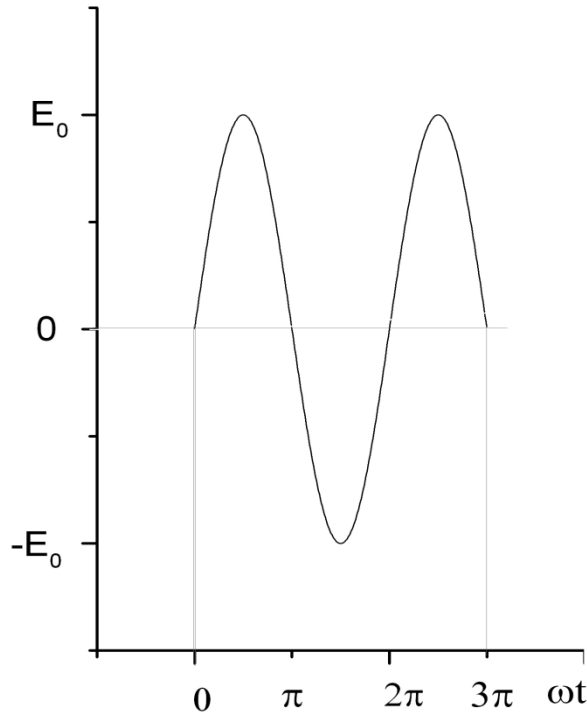


Рис. 3.3. Вид импульса СВЧ с передним и задним фронтами равными $0.25 T$ и длительностью «плато» импульса, равного T .

Если напрямую вычислить энергию электрона в конце импульса длительностью $\frac{3}{2}T$, то получим энергию величиной $2 \frac{e^2 E_0^2}{m\omega^2}$. Отличие от (3.24) обусловлено тем, что СВЧ импульс в выражении (3.2) был взят в форме трапеции (см. рис. 3.1.), и это приводит к занижению энергии электрона по сравнению с формой СВЧ импульса рис. 3.3.

Таким образом, если плато импульса электромагнитной волны составляет четное число полупериодов поля, то СВЧ импульс с минимально короткими передним и задним фронтами ($\frac{T}{4}$) передает электронам энергию, величина которой составляет несколько средних осцилляторных энергий. Если длительность плато импульса равно нечетному числу полупериодов СВЧ поля, то электроны не получают энергию от СВЧ импульса.

Лекция 4. Резонансный и нерезонансный вторично-эмиссионные электронные СВЧ разряды, развивающиеся на поверхности металлов и диэлектриков – мультипакторные разряды

Интерес к изучению вторично-эмиссионных электронных СВЧ (микроволновых) разрядов (в англоязычной литературе такой разряд называется мультипакторным разрядом – multipacting microwave discharge – multipactor) был вызван обнаружением низкоэнергетичных электронов в линейных ускорителях, в которых электроны ускоряются в СВЧ полях до больших энергий (10 МэВ – 50 ГэВ). Повышение мощности генераторов СВЧ излучения для различных целей стимулировало также прикладные и фундаментальные исследования микроволновых разрядов, возникающих в вакуумных системах, например, в системах СВЧ связи космических аппаратов. Эти исследования также направлены на повышение электрической прочности выходных диэлектрических окон мощных СВЧ генераторов и входных диэлектрических окон технологических установок для ввода в них мощного СВЧ излучения. Применение различных диэлектрических элементов в вакуумных волноводных трактах при транспортировке в них мощного импульсного СВЧ излучения требует надежных знаний о механизмах возбуждения и подавления микроволновых разрядов, в особенности мультипакторного разряда как начальной стадии микроволновых пробоев с последующим образованием плотной плазмы. Возникновение плазмы обуславливает поглощение СВЧ излучения в плазме и ее нагрев с выделением тепловой энергии в области контакта плазмы с диэлектрическими элементами и, в конечном итоге, их разрушение.

Эмпирически найденные методы предотвращения микроволновых разрядов в вакуумных системах, как правило, сводились к снижению уровня плотности потока энергии СВЧ излучения. Для подавления мультипакторных микроволновых разрядов в лабораторных установках применялись также

внешние электрические и магнитные поля или специальные покрытия, с помощью которых удавалось в ряде случаев предотвращать переход вторично-эмиссионных электронных разрядов в микроволновый пробой и образование плотной плазмы, разрушающей материалы.

Выполненные в этом направлении работы привели к определенным положительным результатам. Однако, несмотря на достигнутые успехи, проблема повышения электрической прочности волноводных элементов и устойчивости к пробоям диэлектриков в сильных СВЧ полях является актуальной в настоящее время в связи со значительным прогрессом в развитии мощной нерелятивистской и релятивистской сверхвысокочастотной электроники.

В последние годы интенсивные исследования микроволновых разрядов в различных сложных системах вызваны необходимостью решения проблем, возникающих в системах дальней космической связи.

Необходимостью решения более общих проблем мощной электроники, связанных с генерацией, транспортировкой и выводом СВЧ излучения, инициировано развитие фундаментальных исследований различных типов безэлектродных микроволновых разрядов, возбуждаемых на поверхности твердых тел в вакууме.

4.1 Резонансный вторично – эмиссионный электронный СВЧ разряд (резонансный мультипактор)

Десятки лет назад был обнаружен резонансный поперечный вторично-эмиссионный электронный СВЧ разряд (мультипактор), возникающий в вакууме на металлических элементах в мощных сверхвысокочастотных устройствах, используемых в линейных электронных ускорителях. Возбуждение разрядов проявлялось в возникновении большой концентрации низкоэнергетичных электронов в ускорительных промежутках наряду с

высокоэнергетичными пучками ускоренных электронов. Большое количество низкоэнергетичных электронов создавало кулоновский заряд внутри ускоряющих СВЧ элементов, и это влияло на расходимость и спектр ускоряемых высокоэнергетичных электронных пучков. Как было выяснено в ходе исследований, в СВЧ ускорительных устройствах происходило возбуждение мультипакторных разрядов при выполнении определенных резонансных условий.

Физическая природа мультипактора обусловлена тем, что электрон набирает осцилляторную энергию в СВЧ поле и одновременно движется поступательно. В определенных условиях при столкновении электрона с поверхностью металла или диэлектрика он может выбить более одного электрона с поверхности, что обусловлено хорошо изученным явлением вторичной электронной эмиссии. В СВЧ прямоугольных волноводах могут возникать условия, при которых электроны поступают в вакуумный промежуток между широкими стенками в определенный момент фазы осциллирующего поля, когда электрическая компонента поля благоприятна для движения вторичных электронов от эмитируемой поверхности и для набора ими энергии в СВЧ поле. Эти вторичные электроны, набрав энергию в СВЧ поле, в свою очередь, сталкиваются с другой поверхностью, из которой также выбиваются вторичные электроны, и далее, если вылетевшие вторичные электроны попадают в благоприятную фазу осцилляции СВЧ поля, то они также набирают энергию. При многократном повторении этого процесса количество электронов может быстро нарастать во времени по экспоненциальному закону, т.е. возникает электронная лавина. На рис. 4.1 – 4.3 представлены диаграммы, поясняющие механизм возникновения мультипакторного СВЧ разряда в прямоугольном волноводе в самом простом случае возникновения электронной лавины.

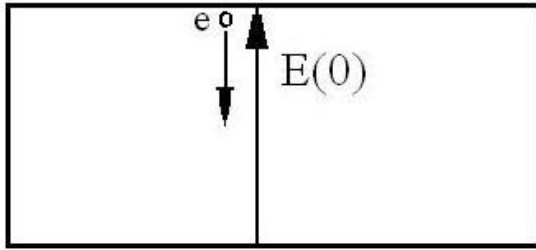


Рис. 4.1а. Диаграмма, иллюстрирующая конфигурацию СВЧ электрического поля $E(0)$ в центре прямоугольного волновода в момент времени $t=0$ и вектора скорости электрона при начале его движения от поверхности широкой верхней стенки волновода по направлению к его нижней стенке.

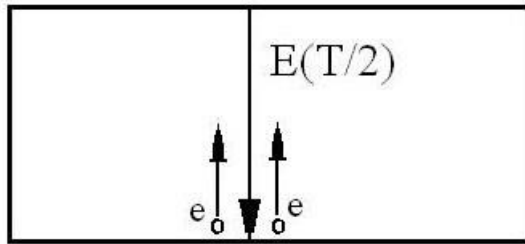


Рис. 4.2а. То же, что и рис.4.1а, но уже при движении вторичных электронов от широкой нижней стенки волновода к его верхней стенке.

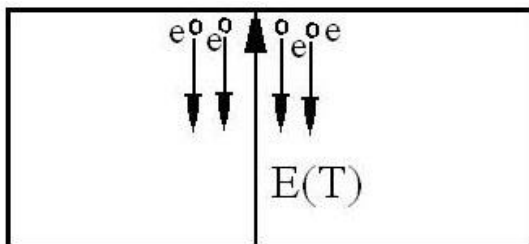


Рис. 4.3а. То же, что и рис.4.2а, но уже при движении вторичных электронов от поверхности верхней широкой стенки волновода к его нижней стенке.

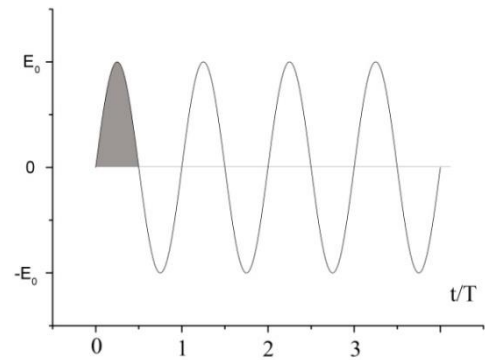


Рис. 4.1б. Осциллограмма колебаний электрического СВЧ поля во времени в волноводе. Заштрихована область фаз СВЧ поля $(0; T/2)$, в которой происходит набор энергии электроном, при его движении от верхней широкой стенки волновода к его нижней стенке. T – период СВЧ поля.

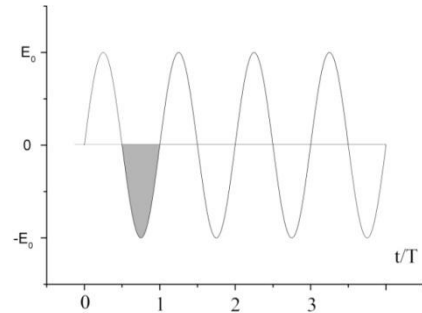


Рис. 4.2б. То же, что и на рис. 4.1б, но здесь заштрихована область фаз СВЧ поля $(T/2; T)$, в которой происходит набор энергии уже вторичными электронами, при их движении от широкой нижней стенки волновода к его верхней стенке.

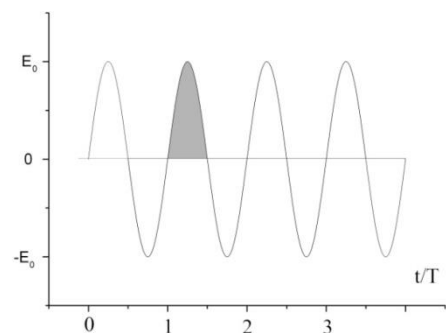


Рис. 4.3б. То же, что и на рис. 4.2б, но здесь заштрихованная область фаз СВЧ поля $(T; 3/2T)$, в которой происходит набор энергии вторичными электронами, при их движении от широкой верхней стенки волновода к его нижней стенке.

Для математического описания представленного на диаграммах процесса формирования электронной лавины в прямоугольном волноводе рассмотрим упрощенную физическую модель развития резонансного поперечного мультитакторного разряда, возникающего в вакуумном зазоре шириной h между двумя параллельными безграничными металлическими пластинами, между которыми распространяется СВЧ излучение с ориентацией вектора электрического поля по нормали по отношению к поверхностям пластин. Такое модельное рассмотрение приближенно соответствует распространению электромагнитного излучения в прямоугольном волноводе (рис. 4.1 – 4.3).

Рассмотрим уравнение движения электрона в зазоре h между пластинами в высокочастотном электрическом поле:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -e E_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.1).$$

Здесь x , t – текущие координата и время для электрона, e , m – заряд и масса электрона, E_0 – амплитуда напряженности электрического поля (направлено вдоль оси OX) и ω – круговая частота осцилляций переменного электрического поля, φ – начальная фаза рождения первого электрона на поверхности металлической пластины, $T = 2\pi/\omega$ – период поля.

Далее для упрощения задачи будем полагать, что вторичные электроны эмитируются с нулевой скоростью. Тогда, интегрируя уравнение движения (4.1) и полагая начальные условия в виде:

$$t=0, \quad x(0)=0, \quad (dx/dt)=V(0)=0 \quad (4.2.),$$

получим решение уравнения движения электрона в виде:

$$V(t) = \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t + \varphi) - \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\varphi) \quad (4.3)$$

$$X(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) - \frac{eE_0 t}{m\omega} \cos(\varphi) - \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(\varphi) \quad (4.4)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} [\cos(\omega t + \varphi) - \cos(\varphi)]^2 \quad (4.5)$$

Рассмотрим наиболее простой частный случай движения электрона в высокочастотном поле, приняв значение начальной фазы равное нулю:

$$t=0, \quad \varphi=0 \quad (4.6).$$

При этом, выражения для координаты $X(t)$, скорости $V(t)$ и энергии $\varepsilon(t)$ электрона принимают вид:

$$X(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(\omega t) - \frac{eE_0 t}{m\omega} \quad (4.7)$$

$$V(t) = \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t) - \frac{eE_0}{m\omega} \quad (4.8)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} [\cos(\omega t) - 1]^2 \quad (4.9).$$

Поскольку в данной модели резонансного мультипакторного разряда предполагается, что его развитие происходит в вакуумном зазоре между двумя металлическими поверхностями, то уравнение движения электрона (4.1) с начальными условиями (4.2) и (4.6) необходимо дополнить граничными условиями на поверхностях пластин. Предполагается также, что в процессе последовательных многократных соударений электронов с металлическими поверхностями, в результате явления вторичной электронной эмиссии, происходит размножение электронной лавины. Таким образом, постановка граничных условий на поверхностях пластин должна обеспечить условия для циклического размножения электронов, бомбардирующих пластины.

В вакуумной электронике хорошо известно явление вторичной электронной эмиссии – выход вторичных электронов с поверхности металлов или диэлектриков при их электронной бомбардировке. Фактически это сложное явление зависит от многих факторов – от энергии бомбардирующих электронов ε_{inc} , угла падения, уровня и качества вакуума, состояния

поверхности и других свойств металлов и диэлектриков. Важным параметром, характеризующим явление вторичной электронной эмиссии, является зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии (ВЭЭ) σ от энергии бомбардирующих поверхность материала электронов $\mathcal{E}_{inc}$. В самом простом случае коэффициент σ можно определить как отношение полного числа электронов, покинувших поверхность N_{se} (вторичные электроны), к полному числу электронов, упавших на поверхность N_{inc} (первичные электроны). Коэффициент вторичной электронной эмиссии может быть определен и в терминах отношения токов вторичных электронов J_{se} к току первичных электронов J_{inc} . Если учесть заряд электрона, то величину коэффициента вторичной электронной эмиссии σ_e можно представить и в виде отношения заряда вторичных электронов Q_{se} к заряду первичных электронов Q_{inc} , упавших на поверхность материала:

$$\sigma = \frac{N_{se}}{N_{inc}} = \frac{Q_{se}}{Q_{inc}} = \frac{J_{se}}{J_{inc}} \quad (4.10).$$

Коэффициент вторичной электронной эмиссии σ_e зависит от энергии $\mathcal{E}_{inc}$ первичных электронов, бомбардирующих поверхность образца, довольно сложным образом. Однако для многих твердых материалов его можно приблизительно описать довольно плавной кривой. Например, для поверхности некоторых диэлектриков и поверхности металлов без специальной обработки при малых энергиях ($\mathcal{E}_{inc} = 5 - 25$ эВ) величина σ возрастает практически линейно от очень малых значений, но остается менее 1. Далее с ростом энергии падающих электронов $\mathcal{E}_{inc}$ в интервале значений от 25 до 500 эВ коэффициент вторичной эмиссии σ может достигнуть значения 1 и превзойти его. Минимальная энергия первичных электронов, при которой $\sigma = 1$ называется первым критическим потенциалом, а в англоязычной

научно-технической литературе “the energy of the first crossover point”. С ростом энергии электронов ε_{inc} величина σ , как правило, увеличивается от 1 до максимального значения σ_{max} . В зависимости от материала бомбардируемой поверхности величина σ_{max} может как немного превышать 1, например, для некоторых очищенных в сверхвысоком вакууме металлов, так и существенно превышать 1, достигая максимальных значений $\sigma_{m0} = 10 - 15$ для некоторых диэлектрических кристаллов, например, для монокристаллического фторида лития LiF . Далее с увеличением энергии ε_{inc} бомбардирующих поверхность образцов электронов в интервале 500 эВ – 5000 эВ коэффициент вторичной электронной эмиссии спадает от максимального значения до 1. Вторичное достижение σ величины 1 уже при довольно больших энергиях электронов называется вторым критическим потенциалом, а в англоязычной литературе “the energy of the second crossover point”. При энергиях первичных электронов $\varepsilon_{inc} = 5000 - 8000$ эВ величина σ спадает с ростом энергии падающих электронов. При энергиях 8000 эВ – 10000 эВ значение σ снижается существенно ниже 1, и далее падает с ростом энергии первичных электронов. Общий вид зависимости коэффициента вторичной электронной эмиссии σ от энергии падающих электронов представлен на рис. 4.4.

Упростим ситуацию, допустив, что в интервале значений первичных электронов ε_{inc} от 0 до 200 эВ коэффициент вторичной электронной эмиссии (в зависимости от энергии первичных электронов) может быть приблизительно аппроксимирован прямой пропорциональной зависимостью вида $\sigma \approx \eta \varepsilon_{inc}$. Важным энергетическим параметром, характеризующим коэффициент вторичной эмиссии материала, является энергия первичных электронов, при которых коэффициент вторичной эмиссии равняется 1, тогда:

$$\sigma(\varepsilon_{inc}) \approx \eta \varepsilon_{inc} = 1.$$

Тогда коэффициент пропорциональности η можно определить как величину, обратную энергии первичных электронов W_1 , при которой коэффициент вторичной эмиссии равен 1. В нашем случае простейшего рассмотрения мультипакторного разряда параметр η может быть выражен так:

$$\eta = \frac{1}{\varepsilon_{inc}(\sigma=1)} = \frac{1}{W_1} \quad (4.11).$$

В этом простейшем случае приближенная формула, описывающая зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии электронов от энергии первичных электронов, бомбардирующих поверхность в вакууме, может быть представлена в виде:

$$\sigma(\varepsilon_{inc}) = \frac{\varepsilon_{inc}}{W_1} \quad (4.12).$$

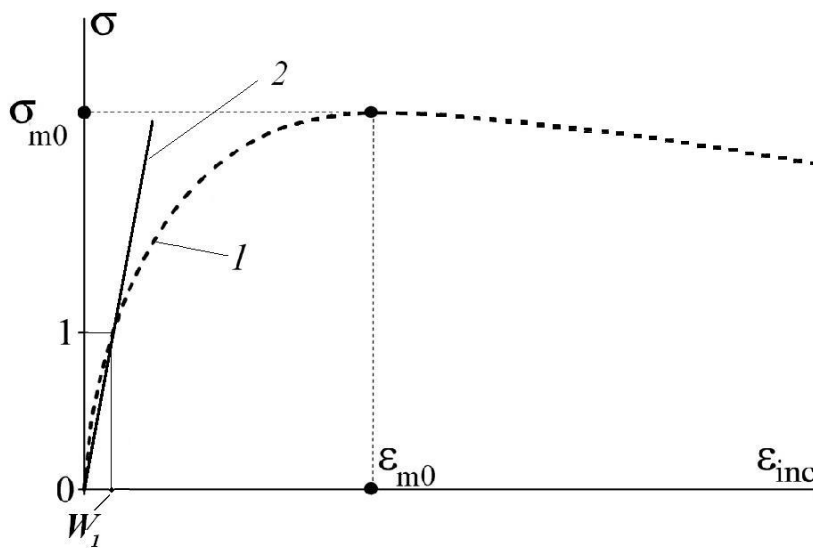


Рис. 4.4. 1 – Схематичная зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии (КВЭЭ) σ от энергии ε_{inc} падающих электронов на поверхность металлов или диэлектриков; 2 – линейная аппроксимация КВЭЭ σ от энергии падающих электронов ε_{inc} (формула 4.12); σ_{m0} – максимальное значение КВЭЭ при энергии падающих электронов $\varepsilon_{inc} = \varepsilon_{m0}$.

Важным для дальнейшего анализа является энергетический спектр вторичных электронов. Из вакуумной электроники известно, что спектр вторичных электронов состоит из трех частей: низкоэнергетичная часть спектра, часть спектра электронов со средней энергией и высокоэнергетичная

часть спектра. Основной частью по количеству содержащихся в ней электронов (80–90%) является низкоэнергетичная часть спектра вторичных электронов, занимающая интервал энергий 1 – 3 эВ с максимумом при энергии около 2 эВ. Положение максимума спектра истинно вторичных электронов практически не зависит от энергии первичных электронов ε_{inc} . Эта часть энергетического спектра вторичных электронов (иногда их называют истинно вторичными электронами) слабо зависит от энергии первичных электронов ε_{inc} , бомбардирующих поверхность. В диапазоне энергий от 4 эВ и вплоть до энергии первичных электронов ε_{inc} , энергетический спектр вторичных электронов слабо спадает с ростом энергии, и эта часть спектра составляет 5 – 10% от полного числа вторичных электронов. Эта часть спектра вторичных электронов иногда называется диффузно отраженными (или неупруго рассеянными) электронами. Далее наблюдается малый локальный максимум в области энергии, равной энергии падающих (бомбардирующих поверхность) электронов ε_{inc} . В этом локальном максимуме содержится небольшая доля вторичных электронов (5–10%), и эта часть спектра связывается с упруго отраженными от поверхности электронами. Соотношение между долями истинно вторичных и отраженных электронов может меняться в зависимости от энергии бомбардирующих электронов и состояния поверхности. В модели резонансного мультипакторного разряда мы будем пренебрегать как упруго отраженными электронами, так и неупруго отраженными электронами из средней части спектра, а учитывать будем только самую многочисленную часть электронов, т.н. истинно вторичные электроны, принимая их среднюю энергию за нулевую (4.2). Это можно сделать только в первом приближении, так как мы будем рассматривать такие значения осцилляторных энергий электронов, при которых коэффициент вторичной электронной эмиссии

будет более 1, т.е. существенно выше среднего значения энергии истинно вторичных электронов.

Учитывая вышеизложенное, будем полагать для простоты, что все вторичные электроны, эмитируемые с поверхности, имеют нулевую энергию, т.е. в моменты времени столкновения первичных электронов с поверхностью t_i , удовлетворяются следующие начальные условия:

$$t=t_i, V_i=0 \quad (4.13),$$

где i – номер столкновения (число столкновений) электронов с поверхностями пластин. Момент времени t_i есть момент времени i -го соударения электронов с одной из двух пластин. При четных значениях индекса i электроны бомбардируют пластину с координатой $x=0$, и с ее поверхности «мгновенно» вылетают вторичные электроны с нулевой энергией. При нечетных значениях индекса i электроны падают на пластину с координатой $x=-h$, и с этой пластины «мгновенно» вылетают вторичные электроны также с нулевой энергией. Из физической электроники известно, что характерные времена задержки вылета вторичного электрона по отношению к моменту бомбардировки поверхности первичным электроном составляет около 10^{-13} с, что существенно меньше полупериода поля СВЧ излучения вплоть до частоты 300 ГГц. В силу этого, можно считать, что вторичные электроны вылетают мгновенно после попадания первичного электрона на поверхность материала.

Кратность мультипакторного разряда $k=1$ соответствует тому, что вылетевший с первичной поверхности электрон достигает противоположной поверхности за время, равное одному половине периода поля $T/2$. Достигнув противоположной второй поверхности через половину периода поля, электрон сталкивается с ней и выбивает несколько вторичных электронов, при этом будем считать, что первичный электрон гибнет. Вылетевшие вторичные электроны уже попадают в другой полупериод СВЧ

электрического поля, в котором поле меняет знак, и, таким образом, это электрическое поле вновь ускоряет вторичные электроны, но уже от второй поверхности обратно к первой поверхности. Если вторичные электроны, вылетевшие с поверхности второй пластины и набравшие энергию от СВЧ поля, достигают поверхности первой пластины ровно через половину периода поля $T/2$, то вторичные электроны, выбитые уже с поверхности первой пластины, вновь попадают в благоприятную фазу электрического СВЧ поля, и ускорение электронов вновь происходит от первой ко второй поверхности. Таким образом, многократное повторение этого процесса приведет к размножению электронов в промежутке между поверхностями, т.е. будет происходить лавинообразное нарастание количества электронов в пространственном промежутке между плоскостями.

Кратность мультипакторного разряда $k=3$ соответствует движению электронов от первой до второй поверхности за три полупериода поля. Для кратности мультипакторного разряда 5, 7 и т.д. соответственно нечетное число полупериодов поля 5, 7 и т.д. Очевидно, что интервалы времени соответствующие четным числам полупериодов СВЧ поля, за которые электроны достигают противоположной поверхности, не могут удовлетворять условиям размножения электронов, так как для таких временных интервалов вылетевшие вторичные электроны будут попадать в такое электрическое поле СВЧ излучения, при котором вторичные электроны не смогут покинуть исходную поверхность.

Тогда резонансные условия для временных интервалов $\Delta t^{(k)}$ между столкновениями электронов с поверхностями, необходимые для развития мультипакторного разряда имеют вид:

$$\Delta t^{(k)} = kT/2 = k/2f = k\pi/\omega, \quad (4.14),$$

здесь $k=1, 3, 5, 7, \dots$ – кратность резонанса, f – линейная частота осцилляции электрического поля, T – период осцилляций, ω – круговая частота осцилляций поля.

Кроме резонансных условий во времени для движения электронов между поверхностями в СВЧ поле, необходимы энергетические условия для «размножения» электронов при каждом столкновении с поверхностью, и, далее, нарастание электронной лавины в результате многократных столкновений с металлическими поверхностями.

Подставляя в (4.12) выражения (4.9) и (4.14), получаем формулу для коэффициента вторичной электронной эмиссии в зависимости от параметров СВЧ поля и временных интервалах между столкновениями электронов со стенками:

$$\sigma(\varepsilon_{inc}) = \frac{\varepsilon_{inc}}{W_1} = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2 W_1} [\cos(\omega\Delta t^{(k)}) - 1]^2 \quad (4.15)$$

Условие, при котором происходит развитие лавины электронов при их столкновениях с поверхностями и увеличение во времени количества электронов при отсутствии их потерь в разрядном промежутке, можно определить так:

$$\sigma(\varepsilon_{inc}) > 1,$$

а порог процесса будет соответствовать условию:

$$\sigma(\varepsilon_{inc}) = \frac{\varepsilon_{inc}}{W_1} = \frac{e^2 E_{0П}^2}{2m\omega^2 W_1} [\cos(\omega\Delta t^{(k)}) - 1]^2 = 1.$$

Учитывая (4.15), получаем энергетическое условие существования и развития мультипакторного разряда в следующем виде:

$$\sigma(\varepsilon_{inc}) = \frac{\varepsilon_{inc}}{W_1} = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2 W_1} [\cos(\omega\Delta t^{(k)}) - 1]^2 > 1 \quad (4.16).$$

При учете условия резонанса (4.14) $\Delta t^{(k)} = k\pi/\omega = k/2\pi f = kT/2$, выражение (4.16) преобразуется к виду:

$$\frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2 W_1} [\cos(\omega \Delta t^{(k)}) - 1]^2 = \frac{2e^2 E_0^2}{m\omega^2 W_1} > 1 \quad (4.17).$$

Окончательно получаем выражение для энергетического критерия развития мультипакторного разряда, связывающее осцилляторную энергию электронов, полученную ими в СВЧ поле к моменту столкновения с противоположной поверхностью, с амплитудой электрической компоненты СВЧ поля E_0 :

$$\frac{2e^2 E_0^2}{m\omega^2} = 8 \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} = 8\mathcal{E}_{cp.osc} > W_1 \quad (4.18).$$

Видно, что энергетический критерий (4.18) не зависит от кратности резонанса k . Но кратность резонанса k определяет пространственно-временные условия развития резонанса. Из выражения (4.7) подстановкой резонансного условия (4.14) получаем условие на размер промежутка $h^{(k)}$ для резонанса кратности k :

$$|X(\Delta t^{(k)})| = \left| \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(\omega \Delta t^{(k)}) - \frac{eE_0 \Delta t^{(k)}}{m\omega} \right| = h^{(k)} = X_0 k\pi \quad (4.19).$$

$$X_0 = \frac{eE_0}{m\omega^2}$$

Отметим, что после каждого столкновения электронов с металлическими пластинами, выбитые с их поверхностей вторичные электроны движутся в промежутке между пластинами со средней скоростью, совпадающей по направлению с вектором ускорения их в электрическом СВЧ поле.

Выражение (4.19) также можно назвать «резонансным» пространственно – временным критерием: при его выполнении для разрядов низкой кратности ($k=1, 3, 5$, т.е. при $\Delta t^{(1)}=\pi/\omega$, $\Delta t^{(3)}=3\pi/\omega$, $\Delta t^{(5)}=5\pi/\omega$) экспериментально наблюдаются характерные резонансные зависимости тока электронов в волноводе от напряженности электрического поля или от величины зазора между двумя пластинами $h^{(k)}$.

Соотношение (4.19.) можно также выразить через осцилляторную скорость и представить в виде:

$$h^{(k)} = X_0 \cdot k\pi = (eE_0/m\omega) \cdot k\pi/\omega = V_0 \cdot \Delta t^{(k)} \quad (4.20).$$

Условия (4.19) и (4.20) означают также, что отношение величины зазора $h^{(k)}$ между двумя пластинами к величине амплитуды осцилляции электрона в высокочастотном поле удовлетворяет соотношению:

$$h^{(k)}/X_0 = k\pi \quad (4.21).$$

Определим теперь характерные параметры развития электронной лавины резонансного мультипакторного разряда в процессе «размножения» электронов в результате последовательных многократных соударений электронов с металлическими пластинами.

Число вторичных электронов, выбитых с поверхности пластины в момент времени $t_i = i\Delta t^{(k)} = i(k\pi/\omega)$, может быть рассчитано по формуле :

$$N(t_i) \equiv N_i = \sigma N_{i-1} = \dots = (\sigma)^j N_{i-j} = \dots = (\sigma)^i N(t_0) = (\sigma)^i N_0 \quad (4.22),$$

где $N(t_0=0) = N_0$ – число первичных электронов в начальный момент времени $t_0=0$, $i = 1, 2, 3, \dots$ – натуральные числа, соответствующие числу столкновений электронов со стенками волновода.

Соотношение (4.22) является показательной функцией, которую удобно преобразовать в экспоненциальную функцию:

$$\begin{aligned} N(t_i^{(k)}) &= N_0 \sigma^i = N_0 \exp\{i \ln(\sigma)\} = N_0 \exp\{(t_i^{(k)}/\Delta t^{(k)}) (\ln \sigma)\} = \\ &= N_0 \exp\{(\ln \sigma / \Delta t^{(k)}) t_i^{(k)}\} = N_0 \exp\{[(\omega/k\pi) \ln \sigma] t_i^{(k)}\}. \end{aligned}$$

Переходим от дискретных интервалов времени $t_i^{(k)}$ к непрерывному времени t , и получаем формулу, описывающую нарастание во времени числа электронов в пространстве между плоскостями в резонансных условиях в зависимости от кратности резонанса k :

$$N(t) = N_0 \exp\{[(\omega/k\pi) \ln \sigma] t\} \quad (4.23).$$

Окончательно получаем выражение для нарастание лавины электронов в виде экспоненты:

$$N(t) = N_0 \exp(\gamma^{(k)} \cdot t) \quad (4.24),$$

$$\gamma^{(k)} = (\omega/k\pi) \ln \sigma \quad (4.25),$$

где $k=1, 3, 5, 7, \dots$ нечетные числа, а параметр $\gamma^{(k)}$ называется инкрементом нарастания электронной лавины резонансного мультипакторного разряда кратности k .

Соотношение (4.25) позволяет интерпретировать величину $\gamma^{(k)}$ как инкремент развития резонансного разряда кратности k . При этом, размножение электронной лавины возможно лишь при условии $\gamma^{(k)} > 0$, т.е. при условии $\sigma > 1$.

Последнее условие согласуется также с энергетическим критерием развития мультипакторного разряда (4.16).

Рассмотрим конкретную задачу 4.1, характерную для описания развития резонансного мультипакторного разряда, возникающего в зауженных волноводах в условиях прохождения СВЧ излучения сантиметрового диапазона длин волн.

Задача 4.1

Рассчитать пороговое значение напряженности электрического поля $E_{0П}$ и резонансные размеры разрядных промежутков $h^{(k)}$ для мультипакторных разрядов кратности $k=1, 3, 5$, развивающихся между широкими стенками волновода из меди ($W_1 \approx 200$ эВ) в поле СВЧ излучения с линейной частотой осцилляции поля $f = \omega/2\pi = 3$ ГГц. Для момента эмиссии вторичных электронов с поверхности волновода принять фазу СВЧ поля равную $\varphi=0$. Определить также инкременты нарастания электронной лавины

$\gamma^{(k)}$ и характерные времена нарастания $\tau^{(k)} = 1/\gamma^{(k)}$ резонансных мультипакторных разрядов кратности $k=1,3,5$ при превышении энергетического порога на 10%.

Решение

Из соотношений (4.18) следует выражение для амплитуды порогового электрического поля СВЧ излучения:

$$E_{0П} = \sqrt{W_1 \frac{m\omega^2}{2e^2}} = \frac{\omega}{e} \sqrt{\frac{W_1 m}{2}} \approx \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^9}{4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 1.41} \sqrt{200 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12} \cdot 9.1 \cdot 10^{-28}} \approx \\ \approx 15.02 (\text{CGSE}) \approx 4506 \text{ В/см}$$

Из выражений (4.20) и (4.21) находим резонансный размер $h_R^{(k)}$ промежутка между широкими стенками волновода в зависимости от кратности k мультипакторного разряда:

$$h_R^{(k)} = \frac{eE_{0П} k \pi}{m\omega^2} \approx \frac{4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 15.02}{9.1 \cdot 10^{-28} (2 \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^9)^2} \cdot 3.14 k \approx 0.07 k \text{ см} = 0.7 k \text{ мм}$$

Для мультипакторных разрядов кратности $k=1,3,5$ значение резонансных размеров расстояний между широкими стенками волновода составляют следующие величины:

$$h_R^{(1)} \approx 0.7 \text{ мм}, \quad h_R^{(3)} \approx 2.1 \text{ мм}, \quad h_R^{(5)} \approx 3.5 \text{ мм}.$$

Отметим, что при увеличении напряженности поля E_0 выше порогового значения $E_{0П}$ соответствующие длины разрядных промежутков $h^{(k)}$ пропорционально увеличиваются в $E_0/E_{0П}$ раз:

$$h^{(k)} = h_R^{(k)} [E_0/E_{0П}].$$

Поскольку энергетический порог развития мультипакторных разрядов не зависит от их кратности, то в предположении о линейном характере зависимости коэффициента вторичной электронной эмиссии от энергии электронов, превышение на 10% порогового значения означает превышение на 10% коэффициента вторичной электронной эмиссии, т.е. для удовлетворения условиям задачи необходимо принять, что $\sigma=1.1$. Тогда, в

соответствии с формулой (4.25), инкремент нарастания электронной лавины в разряде кратности k с учетом превышения энергетического порога определится выражением:

$$\gamma^{(k)} = (\omega/k\pi) \ln \sigma = (2f/k) \ln \sigma \approx (2 \cdot 3 \cdot 10^9/k) \cdot 0.0953 \approx 0.57 \cdot 10^9/k \text{ (с}^{-1}\text{)},$$

$$\text{для } k=1 \quad \gamma^{(1)} \approx 0.57 \cdot 10^9 \text{ (с}^{-1}\text{)},$$

$$\text{для } k=3 \quad \gamma^{(3)} \approx 0.19 \cdot 10^9 \text{ (с}^{-1}\text{)},$$

$$\text{для } k=5 \quad \gamma^{(5)} \approx 0.11 \cdot 10^9 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Соответственно, характерные времена нарастания определим из выражения:

$$\tau^{(1)} = 1/\gamma^{(1)} \approx 1.75 \cdot 10^{-9} \text{ (с)},$$

$$\tau^{(3)} = 1/\gamma^{(3)} \approx 5.26 \cdot 10^{-9} \text{ (с)},$$

$$\tau^{(5)} = 1/\gamma^{(5)} \approx 8.77 \cdot 10^{-9} \text{ (с)}.$$

Таким образом, параметры мультипакторного разряда, заданного условиями задачи, полностью рассчитаны.

Далее рассмотрим мультипакторный разряд, развивающийся между двумя параллельными пластинами в условиях эмиссии электронов в моменты времени, не соответствующие нулевой фазе СВЧ поля.

Определим для этого случая условия, необходимые для развития и поддержания резонансного мультипакторного разряда кратности k при следующих начальных условиях:

$$t=0, \quad x_0=0, \quad V_0=0, \quad \varphi \neq 0 \quad (4.26)$$

Условие синхронизма остается прежним, т.е. $\Delta t^{(k)} = k\pi/\omega$, и совпадает с условием (4.14) для нулевой фазы эмиссии электронов. Тогда, используя формулы (4.3 – 4.5), для резонансных разрядов кратности k найдем следующие выражения для длины разрядного промежутка $h^{(k)}(\varphi)$ при соударении электрона с поверхностью пластин в зависимости от его начальной фазы СВЧ поля φ :

$$h^{(k)}(\varphi) = \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(k\pi + \varphi) - \frac{eE_0 k\pi}{m\omega^2} \cos(\varphi) - \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(\varphi) =$$

$$- \frac{eE_0}{m\omega^2} [k\pi \cos(\varphi) + 2\sin(\varphi)] = -X_0 [k\pi \cos(\varphi) + 2\sin(\varphi)] \quad (4.27).$$

Здесь «формально» величина зазора имеет отрицательный знак, т.к. отрицательно заряженный электрон движется против направления электрического поля, и при движении электрона от первой поверхности с координатой $X=0$ к противоположной поверхности он попадает в область отрицательных значений X , т.е. величина $h^{(k)}$ будет иметь отрицательное значение.

Величина энергии электронов в момент столкновения с противоположной поверхностью в зависимости от фазы СВЧ $\varepsilon(\varphi)$ рассчитаем по формуле:

$$\varepsilon(\varphi) = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} [\cos(\omega\Delta t^{(k)} + \varphi) - \cos(\varphi)]^2 =$$

$$= \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} [\cos(k\pi + \varphi) - \cos(\varphi)]^2 = \quad (4.28).$$

$$\frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} [2\cos(\varphi)]^2 = \frac{2e^2 E_0^2}{m\omega^2} [\cos(\varphi)]^2$$

Отношение размера зазора к амплитуде осцилляции электрона составит:

$$h^{(k)}(\varphi)/X_0 = -[k\pi \cos(\varphi) + 2\sin(\varphi)] \quad (4.29).$$

Если выражение в квадратных скобках положительно, то с учетом знака перед скобками это означает, что электроны, вылетевшие с поверхности с координатой $X=0$ столкнутся с другой поверхностью, расположенной в области отрицательных значений $X < 0$. Тогда получим условие на возможные фазы СВЧ поля, для которых вылетевшие с поверхности электроны $X=0$ попадают на нижнюю поверхность:

$$\begin{aligned}
& [k\pi \cos(\varphi) + 2\sin(\varphi)] > 0 \\
& \sqrt{(k\pi)^2 + 2^2} \left[\frac{k\pi}{\sqrt{(k\pi)^2 + 2^2}} \cos(\varphi) + \frac{2}{\sqrt{(k\pi)^2 + 2^2}} \sin(\varphi) \right] > 0 \\
& \frac{k\pi}{\sqrt{(k\pi)^2 + 4}} \cos(\varphi) + \frac{2}{\sqrt{(k\pi)^2 + 4}} \sin(\varphi) = \sin(\theta^{(k)} + \varphi) > 0 \\
& \theta^{(k)} = \arcsin\left(\frac{k\pi}{\sqrt{(k\pi)^2 + 4}}\right)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Тогда условие на возбуждение двустороннего мультипактора будет соответствовать неравенству:

$$\begin{aligned}
0 < \sin(\theta^{(k)} + \varphi) < 1 & \Rightarrow 0 < \theta^{(k)} + \varphi < \frac{\pi}{2} \\
-\theta^{(k)} < \varphi < \frac{\pi}{2} - \theta^{(k)} & \Rightarrow 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} - \theta^{(k)}
\end{aligned} \tag{4.31}.$$

Определим, в качестве примера, значения $\theta^{(k)}$ для мультипакторных разрядов с кратностями $k = 1, 3, 5, 7$ из формулы (4.30):

$$\theta^{(k)} = \arcsin\{k\pi \cdot [(k\pi)^2 + 4]^{-1/2}\} \tag{4.32}.$$

Тогда, резонансным разрядам, например, кратности $k=1, 3, 5, 7$ соответствуют следующие значения $\theta^{(k)}$:

$$\theta^{(1)} = 57,52^\circ, \quad \theta^{(3)} = 78,02^\circ, \quad \theta^{(5)} = 82,74^\circ, \quad \theta^{(7)} = 84,80^\circ.$$

Из (4.31) получим диапазон значений фаз СВЧ поля, благоприятных для развития двусторонних мультипакторных разрядов различной кратности:

$$\begin{aligned}
k=1, & \Rightarrow 0 < \varphi < 90^\circ - 57,5^\circ \approx 32,5^\circ \\
& 0 < \varphi < 32,5^\circ \\
k=3, & \Rightarrow 0 < \varphi < 90^\circ - 78^\circ \approx 12^\circ \\
& 0 < \varphi < 12^\circ \\
k=5, & \Rightarrow 0 < \varphi < 90^\circ - 83^\circ \approx 7^\circ \\
& 0 < \varphi < 7^\circ \\
k=7, & \Rightarrow 0 < \varphi < 90^\circ - 85^\circ \approx 5^\circ \\
& 0 < \varphi < 5^\circ
\end{aligned}$$

Таким образом, для конкретных значений кратности резонансного двустороннего мультипакторного разряда сначала вычисляется величина θ^k (4.32), далее вычисляется диапазон значений фаз благоприятных для развития этого типа разряда. Затем для конкретной фазы вылета электрона с поверхности рассчитывается величина резонансного промежутка $h^{(k)}(\varphi)$ (4.29). Так рассчитываются фазовые и пространственные характеристики, определяющие возбуждение двустороннего резонансного мультипакторного разряда. Дополнительным и достаточным условием развития таких резонансных мультипакторных разрядов будет удовлетворение энергетическому критерию, аналогичному (4.17 и 4.18).

Далее определим энергетический порог возбуждения мультипактора для эмиссии электрона в фазе СВЧ поля φ . В этом случае значение энергии (4.28), полученной электроном в СВЧ поле к моменту столкновения с противоположной поверхностью, удовлетворяет условию:

$$\frac{2e^2 E_0^2}{m\omega^2} [\cos(\varphi)]^2 = W_1 \quad (4.33).$$

Из сравнения (4.18) и (4.33) заключаем, что пороговое значение напряженности электрического поля для развития мультипактора при эмиссии электронов в фазах СВЧ поля отличных от нуля $\varphi \neq 0$ увеличится в $(1/\cos\varphi)$ раз по сравнению со случаем эмиссии электронов в нулевой фазе СВЧ поля $\varphi=0$:

$$E_{оп}(\varphi) = E_{оп}(\varphi=0)/\cos\varphi \quad (4.34).$$

4.2 Нерезонансный вторично–эмиссионный электронный СВЧ разряд (продольный нерезонансный мультипактор на диэлектрике)

В рассмотренной выше модели резонансного разряда, развивающегося между металлическими пластинами или между широкими стенками волновода, эволюция электронного облака в зазоре между пластинами происходит в виде синфазного движения всех электронов с одинаковыми скоростями. Это связано с тем, что в использованной модели пренебрегался разброс вторично–эмиссионных электронов по скоростям. Поэтому, электронное облако представляет собой плоский нерасплывающийся “тонкий заряженный лист”, движение которого можно описать на основе одномерного уравнения (4.1) движения электрона в высокочастотном электрическом поле. Выполнение условия синхронизма (4.21) в модели резонансного разряда накладывает ряд существенных ограничений на описание физических процессов. В теоретическом описании пренебрежение распределением по скоростям вторично–эмиссионных электронов приводит к искажению описываемых процессов, особенно при расчетах развитого состояния мультипакторного разряда. Также в расчетах не учитывались такие явления как разброс электронов по начальным углам эмиссии, разброс электронов по фазам столкновения электронов с материалом, появление электрического заряда на поверхности (для диэлектриков) и электрического заряда в пространстве, в котором движутся электроны, а также не принималась во внимание нелинейная зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии от энергии и угла падения на поверхность электронов.

Учет выше перечисленных процессов приводит к тому, что следует допустить существование нерезонансных мультипакторных разрядов: одноповерхностных нерезонансных разрядов с электрическим СВЧ полем, тангенциальным к поверхности диэлектриков, и одноповерхностных

нерезонансных разрядов с электрическим СВЧ полем, нормальным к поверхности металлов или диэлектриков.

Эти нерезонансные мультипакторные СВЧ разряды, как правило, наиболее часто встречаются в сверхвысокочастотных устройствах. Такие мультипакторные разряды изучались экспериментально: были определены условия возникновения однородного вдоль поверхности диэлектрика вторично–эмиссионного электронного СВЧ разряда (продольный мультипактор), временная эволюция потока электронов из разряда и процессы электрической зарядки изолированных образцов, на которых возникал мультипактор. В результате этих исследований были разработаны теоретические модели нерезонансных вторично–эмиссионных электронных разрядов, развивающихся на поверхности диэлектриков и металлов в поле СВЧ излучения. Экспериментальные исследования и численное моделирование для развития нерезонансных мультипакторных разрядов на диэлектриках определили величину пороговой амплитуды осцилляторной энергии электрона в СВЧ поле так:

$$\varepsilon_{osc} = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \approx W_1 \quad (4.44).$$

Схема продольного мультипакторного разряда на поверхности диэлектрика приведена на рисунке 4.5.

Рассмотрим схему построения модели нерезонансного мультипакторного разряда, развивающегося на поверхности диэлектрика в вакууме.

Внешнее электрическое СВЧ поле $E_x = E_0 \sin \omega t$ направлено вдоль диэлектрической поверхности. Испускаемые с поверхности вторично–эмиссионные электроны набирают энергию в СВЧ поле и возвращаются назад к поверхности под действием возвращающей силы, обусловленной положительным зарядом, накопленным на диэлектрике в результате того, что эту поверхность покинули больше электронов, чем на нее упали. Для того

чтобы мультипакторный разряд развивался, необходимо, чтобы амплитуда осцилляторной энергии электронов в СВЧ поле $\varepsilon_{osc} = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2}$ должна быть выше энергии первого критического потенциала W_1 .

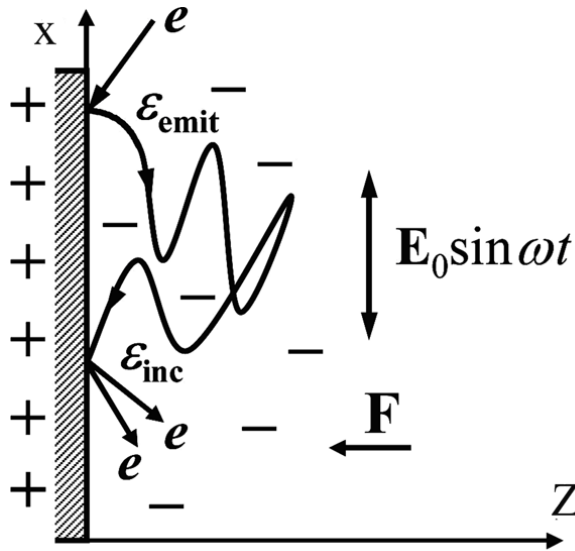


Рис. 4.5. Схема формирования продольного мультипакторного СВЧ разряда на диэлектрической поверхности: электрическое СВЧ поле $\vec{E}_0 \sin(\omega t)$ параллельно поверхности диэлектрической пластины; $\vec{F}$ - статическое электрическое поле, обусловленное зарядом на диэлектрике и объемным зарядом электронов, находящихся вблизи поверхности диэлектрика; ε_{inc} - энергия электронов e , падающих на поверхность диэлектрика; ε_{emit} - энергия вторичных электронов e , эмитированных с поверхности диэлектрика; $\oplus$ - электрический заряд на поверхности диэлектрика, возникающий в результате вторичной электронной эмиссии; $\ominus$ - отрицательный пространственный заряд электронов, находящихся вне диэлектрика.

Основное внимание уделим расчету коэффициента поглощения СВЧ излучения мультипакторным разрядом на диэлектрической пластине в условиях, когда СВЧ поле существенно выше порогового значения:

$$\varepsilon_{osc} = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \gg W_1 \Rightarrow E_0 \gg \frac{\omega}{e} \sqrt{2mW_1}$$

Когда электронная осцилляторная энергия ε_{osc} в СВЧ поле выше, чем первый критический потенциал W_1 , испускаемые вторично-эмиссионные электроны возвращаются назад к поверхности и бомбардируют ее с энергиями, достаточными, чтобы выбить большее число вторичных электронов, чем первичных. В этих условиях развивается электронная лавина, при этом

электроны накапливаются в пространстве около диэлектрической поверхности, тогда как сама поверхность заряжается положительно. По мере увеличения величины удельного заряда на поверхности диэлектрика, время, в течение которого испускаемые вторичные электроны возвращаются назад к поверхности, уменьшается. Электроны все более короткое время находятся в СВЧ поле и меньше получают энергию от поля. Следовательно, по мере накопления заряда, рост электронной лавины постепенно замедляется и со временем мультипактор достигает стадии стабильности или насыщения. В режиме насыщения величина коэффициента вторичной электронной эмиссии σ , усредненная по периоду СВЧ поля, должна быть близка к 1. Если осцилляторная энергия электронов намного выше энергии первого критического потенциала $\varepsilon_{osc} = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \ll W_1$, то в режиме насыщения время нахождения электрона в пространстве вне диэлектрика, должно быть намного короче, чем период СВЧ поля, иначе вторичные электроны, находясь в СВЧ поле, приобрели бы энергию, больше, чем W_1 , и число электронов в лавине продолжало бы нарастать. Режим насыщения означает, что внешнее СВЧ поле изменяется очень немного в течение времени нахождения вторичных электронов в пространстве. Таким образом, в режиме насыщения мультипакторного разряда, для вылетевших с поверхности диэлектрика вторичных электронов реализуются условия почти мгновенного значения СВЧ поля. Следовательно, мы можем использовать так называемое приближение почти «постоянного» СВЧ поля, в котором параметры мультипакторного разряда определяются мгновенным значением электрического СВЧ поля $E_x(t)$, то есть, зависят от времени параметрически. Поскольку в режиме насыщения мультипакторного разряда падающие на поверхность электроны обладают энергией, близкой к величине первого критического потенциала W_1 , а вылетающие вторичные электроны имеют существенно меньшую энергию, то очевидно, что поглощение СВЧ

излучения обусловлено разностью потоков энергии падающих и вторичных электронов. Поскольку в расчетах мы будем учитывать только истинно вторичные электроны, а их энергии существенно меньше энергий падающих на поверхность диэлектрика электронов, то потоком энергии, уносимым с поверхности диэлектрика истинно вторичными электронами, будем пренебрегать в сравнении с потоком энергии падающих на диэлектрик электронов. В этом приближении рассчитаем мощность, выделяемую бомбардирующими электронами на единице диэлектрической поверхности, и эта мощность определяет ту часть мощности СВЧ, которая поглощается в мультипакторном разряде. Эта мощность может быть оценена аналитически в результате расчета движения электронов в пространстве около поверхности диэлектрика с учетом пространственного распределения плотности электронов у поверхности диэлектрика в режиме насыщения. Этот расчет и составит первый этап подготовительных вычислений, приводимых ниже.

Для расчета пространственного распределения электрического потенциала и плотности заряда электронов около поверхности диэлектрика воспользуемся уравнением Максвелла в виде:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \quad (4.45),$$

где $\vec{E}$ – электрическое поле объемных зарядов, ρ – объемная удельная плотность зарядов в пространстве около поверхности диэлектрика. Будем считать при построении математической модели нерезонансного мультипактора, что по осям OX и OY (вдоль поверхности диэлектрика) пространственные распределения зарядов и поля однородны, тогда потенциальное электрическое поле $\vec{E}$ можно выразить через производную электрический потенциал ψ вдоль оси OZ (по нормали к поверхности):

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\psi \Rightarrow |\vec{E}| = E = -\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad (4.46).$$

Для решения уравнения (4.45) с учетом (4.46) будем полагать, что в потенциальном поле электроны, находящиеся в пространстве около поверхности диэлектрика, распределены по закону Больцмана:

$$n_e = n_0 \exp\left(-\frac{W_p}{T_e}\right) \quad (4.47),$$

W_p – потенциальная энергия электрона в точке со значением электрического потенциала ψ , T_e – эффективная температура вторично-эмиссионных электронов. Так как потенциальная энергия этих электронов равна $W_p = -e\psi$, то больцмановское распределение электронов по энергии в потенциальном электрическом поле будет таким:

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\psi}{T_e}\right) \quad (4.48).$$

Далее для решения уравнения (4.45) с учетом выражений (4.46) и (4.48) необходимо знать эффективную температуру вторично-эмиссионных электронов T_e . Для этого рассмотрим распределение вторично-эмиссионных электронов по энергиям, которое довольно хорошо известно из многих экспериментов, и такое типичное распределение представлено рис. 4.6.

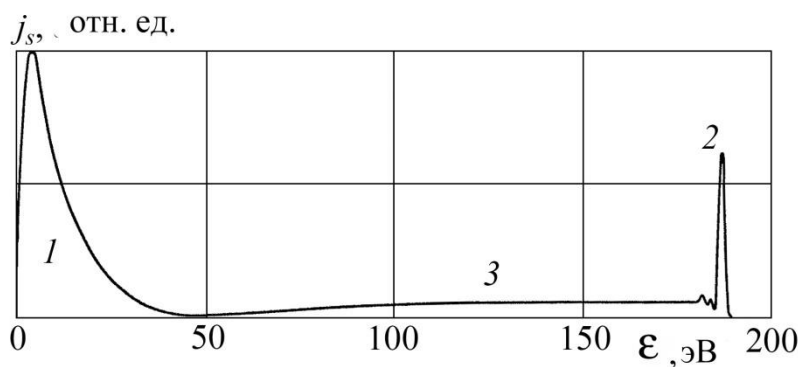


Рис. 4.6. Типичное распределение вторичных электронов по энергиям ϵ , при падении первичных электронов с энергией $\epsilon_{inc} = 185$ эВ: (1) истинно вторичные электроны, (2) упруго отраженные электроны, (3) неупруго отраженные (рассеянные) электроны.

Для распределения по энергиям вторично-эмиссионных электронов характерны три части спектра: (1) – это истинно вторичные электроны составляют до 80% от полного числа вторичных электронов, которые описываются максвелловским распределением с эффективной температурой

$T_e \approx 1-2$ эВ, величина которой практически не зависит от энергии первичных электронов $\mathcal{E}_{inc}$, (2) – это упруго отраженные электроны составляют до 10%, и энергия которых практически совпадает с энергией первичных электронов, (3) – это неупруго отраженные (диффузно отраженные или рассеянные) электроны также составляют до 10%.

Упростим задачу так, что будем сначала учитывать только истинно вторичные электроны, которые определяют основной пространственный заряд и описываются максвелловским распределением по энергиям с эффективной температурой T_e . Тогда распределение вторичных электронов n_e в потенциальном поле около диэлектрика будет описываться распределением Больцмана (4.48). Учитывая (4.48) и то, что плотность зарядов определяется объемной плотностью электронов $\rho = -en_e$, уравнение (4.45) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -4\pi en_0 \exp\left(\frac{e\psi}{T_e}\right) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= 4\pi en_0 \exp\left(\frac{e\psi}{T_e}\right) \end{aligned} \quad (4.49).$$

Для решения уравнения (4.49) умножим левую и правую части на пространственную производную потенциала ψ , и проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= 4\pi en_0 \exp\left(\frac{e\psi}{T_e}\right) \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] &= 4\pi en_0 \exp\left(\frac{e\psi}{T_e}\right) \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.50).$$

Поскольку потенциал ψ зависит только от координаты, то переходим от частных к полным производным и к интегрированию уравнения (4.50):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 &= \int 4\pi en_0 \exp\left(\frac{e\psi}{T_e}\right) \frac{d\psi}{dz} dz = \int 4\pi en_0 \exp\left(\frac{e\psi}{T_e}\right) d\psi \\ \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 &= 4\pi n_0 T_e \int \exp\left(\frac{e\psi}{T_e}\right) d\left(\frac{e\psi}{T_e}\right) = 4\pi n_0 T_e \exp\left(\frac{e\psi}{T_e}\right) + C_1 \end{aligned} \quad (4.51),$$

здесь C_1 постоянная интегрирования, требующая определения из граничных условий задачи. Определим граничные условия следующим образом. В начальный момент заряд на поверхности диэлектрика равен нулю, и по мере развития мультипактора заряд на диэлектрике приобретает положительное значение. Область вне поверхности имеет отрицательный объемный заряд, и движение эмитированного с поверхности диэлектрика электрона тормозится как полем положительного заряда поверхности диэлектрика, так и полем электронов вне поверхности диэлектрика. Таким образом, электрическое поле зарядов, возникающих в мультипакторном разряде, направлено от поверхности в положительном направлении оси OZ , следовательно, градиент потенциала (4.46) направлен к поверхности, а сам потенциал во всей области должен иметь отрицательное значение относительно поверхности диэлектрика и увеличиваться по абсолютной величине по мере удаления от поверхности на бесконечность. Поэтому естественно за величину потенциала $\psi=0$ принять потенциал поверхности диэлектрика. Если электрическое поле зарядов на поверхности обозначить как E_{so} , тогда из (4.51) получим следующее соотношение:

$$E_{so}^2 = 8\pi n_0 T_e + C_1 \quad (4.52).$$

Поскольку функция потенциала должна быть непрерывной, то по мере движения от поверхности диэлектрика по оси OZ потенциал будет становиться все более отрицательным. При отсутствии потерь электронов сумма зарядов на поверхности диэлектрика и объемных зарядов вне поверхности диэлектрика будет стремиться к нулю, и при удалении от поверхности диэлектрика на бесконечность ($Z \rightarrow \infty$) электрическое поле зарядов будет стремиться к нулю. Это означает, что $\left| \frac{d\psi}{dz}(z \rightarrow \infty) \right| = E_\infty \rightarrow 0$.

Тогда из выражения (4.51) получаем следующее соотношение:

$$\left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 = E_\infty^2 = 0 = 2C_1 \quad (4.53)$$

В этом случае уравнение (4.51) преобразуется к виду:

$$\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 = 8\pi n_0 T_e \exp\left(\frac{e\psi}{T_e}\right) = E_{so}^2 \exp\left(\frac{e\psi}{T_e}\right) \quad (4.54).$$

Интересно заметить, из (4.54) следует, что $\frac{E_{so}^2}{8\pi} = n_0 T_e$, т.е. давление электрического поля вблизи поверхности диэлектрика равно давлению электронов, находящихся вблизи поверхности.

Решение (4.54) с учетом (4.46) может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{d\psi}{dz} &= \sqrt{8\pi n_0 T_e} \exp\left(\frac{e\psi}{2T_e}\right) \\ -\int_0^\psi \exp\left(-\frac{e\psi}{2T_e}\right) d\psi &= \int_0^z \sqrt{8\pi n_0 T_e} dz \\ \frac{2T_e}{e} \exp\left(-\frac{e\psi}{2T_e}\right) - \frac{2T_e}{e} &= z \sqrt{8\pi n_0 T_e} \\ \exp\left(-\frac{e\psi}{2T_e}\right) &= 1 + z \frac{\sqrt{8\pi n_0 T_e}}{\frac{2T_e}{e}} = 1 + z \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{2T_e}} = 1 + \frac{z}{r_D} \\ r_D^{-1} &= \frac{\sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e}}}{\sqrt{\frac{2T_e}{m_e}}} = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{2T_e}} = \frac{\omega_{pe}}{V_T} \end{aligned} \quad (4.55),$$

здесь $r_D = \frac{V_T}{\omega_{pe}}$ – радиус Дебая, $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e}}$ – электронная плазменная

частота, здесь $V_T = \sqrt{\frac{2T_e}{m_e}}$ – тепловая скорость вторично-эмиссионных

электронов с эффективной температурой T_e . Далее из (4.55) получаем выражение величины потенциала ψ в зависимости от координаты z :

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{e\psi}{2T_e}\right) &= 1 + \frac{z}{r_D} \\ -\frac{e\psi}{2T_e} &= \ln\left(1 + \frac{z}{r_D}\right) \\ \psi &= \frac{T_e}{e} \ln\left(1 + \frac{z}{r_D}\right)^{-2}\end{aligned}\quad (4.56)$$

Теперь, зная распределение электрического потенциала в пространстве перед диэлектриком, можно с помощью распределения Больцмана получить и пространственное распределение плотности электронов вблизи диэлектрика:

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\psi}{T_e}\right) = n_0 \left(1 + \frac{z}{r_D}\right)^{-2} \quad (4.57).$$

На рисунках 4.7 и 4.8 представлены графики зависимости электрического потенциала (формула 4.56) и плотности электронов (формула 4.57) вблизи диэлектрика в зависимости от расстояния от поверхности Z .

Полученные распределения плотности электронов и электрического потенциала вблизи поверхности диэлектрика необходимы для второго этапа вычислений, а именно, расчета времени пребывания вторично-эмиссионных электронов в пространстве вне диэлектрика и в СВЧ поле, так как это время определяет величину энергии, которую получают эти электроны в СВЧ поле.

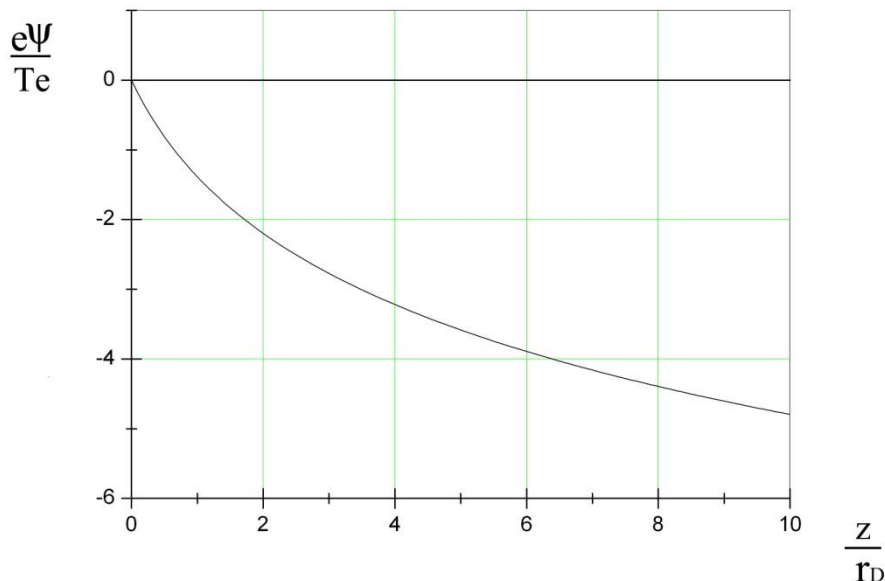


Рис 4.7. График электрического потенциала $\psi(z)$ вблизи диэлектрика в зависимости от расстояния от поверхности Z .

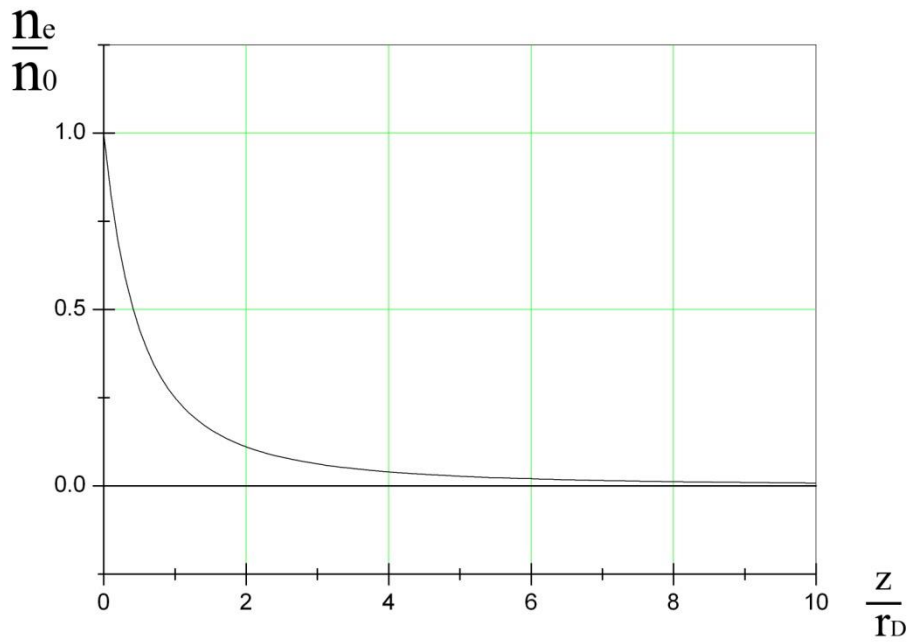


Рис 4.8. График плотности электронов $n_e(z)$ вблизи диэлектрика в зависимости от расстояния от поверхности Z .

Определим время пребывания вторично-эмиссионных электронов в СВЧ поле Δt так:

$$\Delta t = 2 \int_0^{t_{\max}} dt = \int_{\varepsilon_{z0}}^0 \frac{d\varepsilon_z}{\frac{d\varepsilon_z}{dt}} \quad (4.58),$$

где ε_z – текущая энергия вторично-эмиссионных электронов, движущихся по оси OZ в электрическом поле зарядов на поверхности диэлектрика и в пространстве вблизи него, $\frac{d\varepsilon_z}{dt}$ – производная этой энергии по времени, которая может быть рассчитана так:

$$\frac{d\varepsilon_z}{dt} = -eE_z V_z = -eE_z \sqrt{\frac{2\varepsilon_z}{m_e}} \quad (4.59),$$

где $V_z = \sqrt{\frac{2\varepsilon_z}{m_e}}$ – текущая скорость вторично-эмиссионных электронов по

оси OZ , E_z – электрическое поле зарядов, которое вычисляется из выражений (4.46) и (4.56) следующим образом:

$$E_z = -\frac{d\psi}{dz} = \frac{2T_e}{e} \frac{d}{dz} \left[\ln\left(1 + \frac{z}{r_D}\right) \right] = \frac{2T_e}{er_D} \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{r_D}\right)} \quad (4.60).$$

Из выражения (4.57) имеем следующее соотношение:

$$n_e = n_0 \left(1 + \frac{z}{r_D}\right)^{-2} \quad (4.61).$$

$$\left(\frac{n_e}{n_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{z}{r_D}\right)^{-1} = \exp\left(\frac{e\psi}{2T_e}\right)$$

Подставляя (4.61) в (4.60) и далее в (4.59) получаем выражение для временной производной энергии электронов по оси OZ в виде:

$$\frac{d\varepsilon_z}{dt} = -eE_z \sqrt{\frac{2\varepsilon_z}{m_e}} = -\frac{2T_e}{r_D} \sqrt{\frac{2\varepsilon_z}{m_e}} \exp\left(\frac{e\psi}{2T_e}\right) \quad (4.62).$$

Подставляя выражение (4.62) в интеграл (4.58) получаем выражение для времени нахождения электронов вне диэлектрика и в СВЧ поле:

$$\Delta t = 2 \int_0^{t_{\max}} dt = 2 \int_{\varepsilon_{z0}}^0 \frac{d\varepsilon_z}{\frac{d\varepsilon_z}{dt}} = 2 \int_{\varepsilon_{z0}}^0 \frac{d\varepsilon_z}{-\frac{2T_e}{r_D} \sqrt{\frac{2\varepsilon_z}{m_e}} \exp\left(\frac{e\psi}{2T_e}\right)} = 2 \int_0^{\varepsilon_{z0}} \frac{\exp\left(-\frac{e\psi}{2T_e}\right) d\varepsilon_z}{\frac{2T_e}{r_D} \sqrt{\frac{2\varepsilon_z}{m_e}}} \quad (4.63).$$

Следует учесть (4.55), и что $r_D = \frac{V_T}{\omega_{p0}} = \frac{\sqrt{\frac{2T_e}{m_e}}}{\omega_{p0}}$, тогда выражение (4.63)

преобразуется к следующему:

$$\Delta t = 2 \int_0^{\varepsilon_{z0}} \frac{\exp\left(-\frac{e\psi}{2T_e}\right) d\varepsilon_z}{\frac{2T_e}{\frac{\sqrt{\frac{2T_e}{m_e}}}{\omega_{p0}}} \sqrt{\frac{2\varepsilon_z}{m_e}}} = \frac{1}{\omega_{p0}} \int_0^{\varepsilon_{z0}} \frac{\exp\left(-\frac{e\psi}{2T_e}\right) d\varepsilon_z}{\sqrt{T_e} \sqrt{\varepsilon_z}} \quad (4.64).$$

Так как текущая энергия электронов, движущихся по оси OZ в поле электрического потенциала ψ равна:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{z0} - (-e\psi) = \varepsilon_{z0} + e\psi \quad (4.65),$$

то из (4.64) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{1}{\omega_{p0}} \int_0^{\varepsilon_{z0}} \frac{\exp(-\frac{e\psi}{2T_e}) d\varepsilon_z}{\sqrt{T_e} \sqrt{\varepsilon_z}} = \frac{1}{\omega_{p0}} \int_0^{\varepsilon_{z0}} \frac{\exp(\frac{\varepsilon_{z0} - \varepsilon_z}{2T_e}) d\varepsilon_z}{\sqrt{T_e} \sqrt{\varepsilon_z}} = \\ &= 2\sqrt{2} \frac{\exp(\frac{\varepsilon_{z0}}{2T_e})}{\omega_{p0}} \int_0^{\varepsilon_{z0}} \frac{\exp(-\frac{\varepsilon_z}{2T_e}) d(\sqrt{\varepsilon_z})}{\sqrt{2T_e}} = \\ &= 2\sqrt{2} \frac{\exp(\frac{\varepsilon_{z0}}{2T_e})}{\omega_{p0}} \int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon_{z0}}{2T_e}}} \exp(-\alpha^2) d\alpha = \sqrt{2\pi} \frac{\exp(\frac{\varepsilon_{z0}}{2T_e})}{\omega_{p0}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{z0}}{2T_e}}\right) \end{aligned} \quad (4.66),$$

здесь $\operatorname{erf}(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta \exp(-\alpha^2) d\alpha$ – функция ошибок (Рис. 4.9).

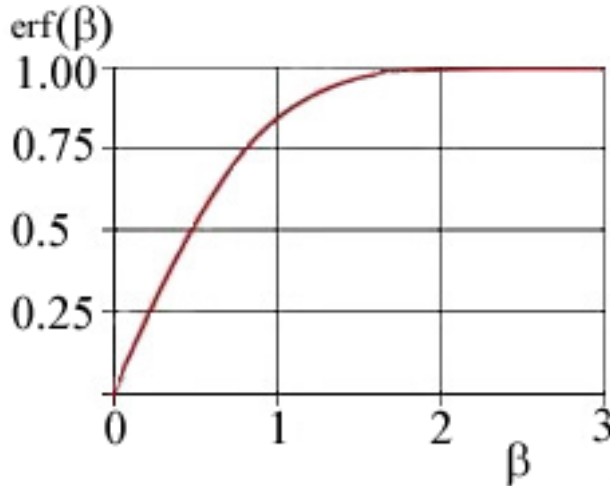


Рис. 4.9. Вид функции ошибок

$$\operatorname{erf}(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta \exp(-\alpha^2) d\alpha$$

интервале значений $\beta \in [0, 3]$

В нашем случае параметры функции ошибок равны $\alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon_z}{2T_e}}$, $\beta = \sqrt{\frac{\varepsilon_{z0}}{2T_e}}$.

Далее рассчитаем величину энергии падающих на поверхность диэлектрика электронов, которая будет фигурировать в балансе потоков первичных и вторичных электронов при расчете коэффициента поглощения СВЧ излучения в мультипакторном разряде. Принимаем во внимание то, что в режиме насыщения мультипакторного разряда характерная энергия

падающих на диэлектрик первичных электронов должна составлять величину примерно равную первому критическому потенциалу W_1 . При этом имеем в виду, что величина W_1 по крайней мере на порядок превосходит температуру вторичных электронов T_e ($W_1 \gg T_e$). В этом случае упростим расчеты и пренебрежем начальными скоростями электронов по осям OX и OY , в то время как начальная скорость V_{z0} по оси OZ и, соответственно, начальная энергия $\mathcal{E}_{z0}$, не могут быть проигнорированы, так как они определяют время $\Delta t(\mathcal{E}_{z0})$ нахождения электронов в СВЧ поле. Характерная скорость, которую электроны набирают в СВЧ поле за время $\Delta t(\mathcal{E}_{z0})$ нахождения вне диэлектрика определяется выражением:

$$V_x = -\frac{eE_0 \sin \omega t}{m_e} \Delta t(\mathcal{E}_{z0}) = -\frac{eE_x}{m_e} \Delta t(\mathcal{E}_{z0}) \quad (4.67).$$

Соответственно, энергия падающих на поверхность диэлектрика электронов $\mathcal{E}_{inc}$, полученная от СВЧ поля за промежуток времени $\Delta t(\mathcal{E}_{z0})$, будет определяться выражением:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{inc} &= \frac{m_e V_x^2}{2} = \frac{m_e}{2} \left[\frac{eE_x}{m_e} \Delta t(\mathcal{E}_{z0}) \right]^2 = \frac{e^2 E_x^2}{2m_e} 2\pi \frac{\exp(\frac{2\mathcal{E}_{z0}}{2T_e})}{\omega_{pe}^2} \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_{z0}}{2T_e}} \right) \right]^2 \approx \\ &\approx \frac{\pi e^2 E_x^2}{m_e} \frac{m_e}{4\pi n_0 e^2} \exp(\frac{\mathcal{E}_{z0}}{T_e}) \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_{z0}}{2T_e}} \right) \right]^2 = \frac{E_x^2}{4n_0} \exp(\frac{\mathcal{E}_{z0}}{T_e}) \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_{z0}}{2T_e}} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (4.68).$$

При этом имеем в виду, что $\mathcal{E}_{inc} \gg T_e$. Далее, на основе предположения о стационарности параметров мультипакторного разряда в режиме насыщения, запишем уравнение баланса потоков для падающих электронов на диэлектрик и вторичных электронов, эмитируемых с поверхности диэлектрика:

$$\int \sigma(\varepsilon_{inc}) n_0 \exp\left(\frac{e\psi}{T_e}\right) V_{zi} d(V_{zi}) = \int n_0 \exp\left(\frac{e\psi}{T_e}\right) V_{zo} d(V_{zo}) \quad (4.69),$$

где $\sigma(\varepsilon_{inc})$ – коэффициент вторичной электронной эмиссии (КВЭЭ) с поверхности диэлектрика в зависимости от полной энергии ε_{inc} падающих на диэлектрик электронов, V_{zi} – скорость падающих электронов, V_{zo} – скорость вторичных электронов, n_0 – плотность электронов вблизи поверхности диэлектрика. Так как энергия электронов, движущихся по оси OZ в пространстве электрического потенциала вне диэлектрика, определяется соотношением (4.65), n_0 – постоянная величина, а вблизи поверхности распределение электронов по продольным энергиям ε_{zo} определяется одномерным максвелловским распределением с эффективной температурой T_e , скорость по оси OZ вылетающих с поверхности диэлектрика электронов и скорость падающих на поверхность электронов равны (по этой оси электроны движутся в потенциальном электрическом поле и возвращаются на поверхность с той же скоростью, с которой они ее покинули $V_{zi} = V_{zo}$), то при условии стационарности получаем следующее уравнение, определяющее равенство потока падающих на поверхность диэлектрика электронов и испускаемых поверхностью вторичных электронов:

$$\int \sigma(\varepsilon_{inc}) \exp\left(\frac{-\varepsilon_{zo}}{T_e}\right) d(\varepsilon_{zo}) = \int \exp\left(\frac{-\varepsilon_{zo}}{T_e}\right) d(\varepsilon_{zo}) \quad (4.70).$$

Поскольку величина полной энергии электронов ε_{inc} определяется в основном СВЧ полем в соответствии с соотношением (4.68) и зависит от времени нахождения электронов в СВЧ поле $\Delta t(\varepsilon_{zo})$, то для решения уравнения (4.70) необходимо знать аналитическое выражение для $\sigma(\varepsilon_{inc})$. Обобщенные зависимости коэффициента вторичной электронной эмиссии

(КВЭЭ) для многих материалов представлены на рис.4.4. Однако в реальности эти зависимости более сложные. Три вида таких зависимостей $\sigma(\varepsilon_{inc})$ представлены на рис.4.10. и рис. 4.11.

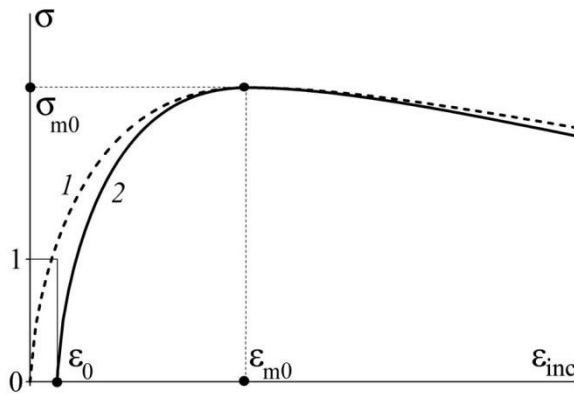


Рис. 4.10. Схематические зависимости КВЭЭ $\sigma(\varepsilon_{inc})$ от энергии падающих электронов ε_{inc} :

1 — упрощенная (классическая) зависимость КВЭЭ. 2 — зависимость КВЭЭ с учетом энергии отсечки ε_0 ; ε_0 — энергия отсечки, ниже которой КВЭЭ равен нулю для кривой 2. ε_{m0} — энергия падающих первичных электронов, при которой достигается максимальное значение КВЭЭ σ_{m0} ,

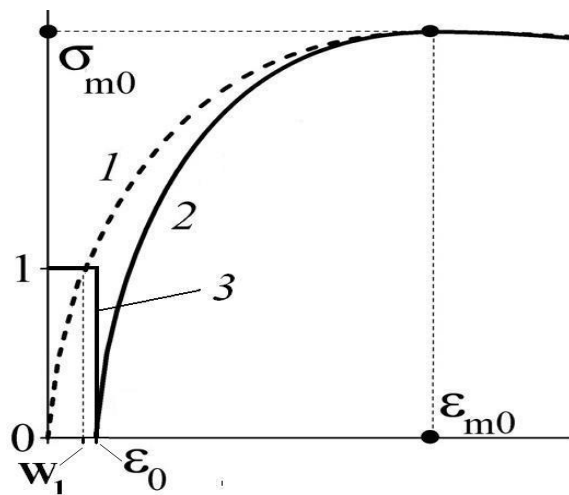


Рис. 4.11. Участок зависимости КВЭЭ $\sigma(\varepsilon_{inc})$ от энергии падающих на диэлектрик первичных электронов ε_{inc} в интервале значений энергии $[0, \varepsilon_{m0}]$. 1 и 2 — то же самое, что и на рис. 4.10. 3 — зависимость КВЭЭ с учетом абсолютно упруго отраженных первичных электронов при энергиях меньше ε_0 для КВЭЭ - 2. W_1 — энергия первого критического потенциала для зависимости КВЭЭ - 1.

Имеется приближенная аналитическая формула КВЭЭ, выведенная Воганом (Vaughan J R M 1989 IEEE Trans. Electron Dev. **36** 1963) на основе большой базы данных для многих диэлектриков и металлов, которая с достаточно хорошей точностью воспроизводит зависимость КВЭЭ $\sigma(\varepsilon_{inc})$ от энергии ε_{inc} первичных электронов при условии знания экспериментальных значений таких важных параметров как W_1 , ε_{m0} , σ_{m0} , ε_0 . Эта обобщенная формула

Вона, описывает зависимость 2 (см. рис. 4.10 и 4.11), которая имеет аналитическое выражение вида:

$$\sigma = \sigma_{\max} (Be^{1-B})^{\eta} \quad (4.71),$$

где величина $B = (\varepsilon_{\text{inc}} - \varepsilon_0) / (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_0)$, ε_{inc} – энергия падающих первичных электронов, ε_{m0} – энергия падающих первичных электронов, при которой достигается максимальное значение КВЭЭ σ_{m0} , ε_0 – энергия отсечки, ниже которой КВЭЭ равен нулю (рис. 4.10 и рис.4.11 зависимость 2), величина $\eta = 0.62$ для $B < 1$; $\eta = 0.25$ для $B > 1$; $\sigma_{\max} = \sigma_{m0}(1 + \theta^2/2\pi)$; $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{m0}(1 + \theta^2/\pi)$; θ – угол падения первичных электронов относительно нормали к поверхности диэлектрика; величины σ_{m0} и ε_{m0} соответствуют максимальному значению КВЭЭ при угле падения первичных электронов по нормали к поверхности $\theta = 0$. В нашем случае электроны в мультипакторном разряде осциллируют почти параллельно поверхности диэлектрика, т.е. столкновения электронов с поверхностью происходят почти при касательных углах $\theta = \pi/2$. Далее для упрощения в расчетах мы будем использовать также более простую формулу Вона, которая графически представлена кривой 1 на рис.4.10 и 4.11. Формула, описывающая кривую 1, получается из формулы (4.71) при $\varepsilon_0 = 0$, т.е. при равенстве нулю энергии отсечки. Тогда для $\varepsilon_0 = 0$ и при $\theta = \pi/2$ получаем следующие значения величин, входящих в формулу (4.71):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\max} &= \varepsilon_{m0}(1 + \theta^2 / \pi) = \varepsilon_{m0}(1 + \frac{\pi^2}{4\pi}) \approx 1.785\varepsilon_{m0} \\ \sigma_{\max} &= \sigma_{m0}(1 + \theta^2 / 2\pi) = \sigma_{m0}(1 + \pi^2 / 8\pi) \approx 1.39\sigma_{m0} \\ B &= (\varepsilon_{\text{inc}} - \varepsilon_0) / (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_0) = \frac{\varepsilon_{\text{inc}}}{\varepsilon_{\max}} \approx 0.56 \frac{\varepsilon_{\text{inc}}}{\varepsilon_{m0}} \end{aligned} \quad (4.72)$$

В условиях режима насыщения мультипакторного разряда энергии первичных электронов ε_{inc} существенно меньше значения энергии ε_{m0} , тогда

$B < 1$, и показатель степени в (4.71) равен $\eta = 0.62$. Для этого случая допустимо дальнейшее упрощение формулы Вона в виде:

$$\sigma(\mathcal{E}_{inc}) \approx 1.39 \sigma_{m0} \left(\frac{0.56 \mathcal{E}_{inc} \exp(1 - 0.56 \frac{\mathcal{E}_{inc}}{\mathcal{E}_{m0}})}{\mathcal{E}_{m0}} \right)^{0.62} \quad (4.73).$$

Для рассматриваемого режима насыщения стационарного мультипаторного разряда величина отношения энергии падающих на поверхность диэлектрика электронов $\mathcal{E}_{inc}$ к энергии $\mathcal{E}_{m0}$, при которой достигается максимальное значение коэффициента вторичной электронной эмиссии (см. рис.4.10 и 4.11), выполняется соотношение $\frac{\mathcal{E}_{inc}}{\mathcal{E}_{m0}} \ll 1$. Тогда

выражение (4.73) можно упростить так:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{E}_{inc}) &\approx 1.39 \sigma_{m0} \left(\frac{0.56 \mathcal{E}_{inc} \exp(1 - 0.56 \frac{\mathcal{E}_{inc}}{\mathcal{E}_{m0}})}{\mathcal{E}_{m0}} \right)^{0.62} \approx \\ &\approx 1.39 \sigma_{m0} \cdot (0.56)^{0.62} \left(\frac{\mathcal{E}_{inc}}{\mathcal{E}_{m0}} \right)^{0.62} (\exp 1)^{0.62} \approx 1.8 \sigma_{m0} \left(\frac{\mathcal{E}_{inc}}{\mathcal{E}_{m0}} \right)^{0.62} \end{aligned} \quad (4.74).$$

Здесь интересно отметить, что для случая падения электронов по нормали к поверхности диэлектрика при $\theta = 0$, значение $B \approx \frac{\mathcal{E}_{inc}}{\mathcal{E}_{m0}}$, и при $\frac{\mathcal{E}_{inc}}{\mathcal{E}_{m0}} \ll 1$

коэффициент вторичной электронной эмиссии может быть также рассчитан по формуле Вона так:

$$\sigma(\mathcal{E}_{inc}) \approx \sigma_{m0} \left(\frac{\mathcal{E}_{inc} \exp(1)}{\mathcal{E}_{m0}} \right)^{0.62} \approx 1.86 \sigma_{m0} \left(\frac{\mathcal{E}_{inc}}{\mathcal{E}_{m0}} \right)^{0.62} \quad (4.75).$$

Из сравнения выражений (4.74) и (4.75) можно заключить, что они отличаются не более чем на 3%, т.е. для режима насыщения мультипакторного разряда величины коэффициентов вторичной электронной эмиссии практически равны как для нормального падения, так и для тангенциального падения электронов на поверхность диэлектрика. Для

режима насыщения имеем $\varepsilon_{inc} \approx W_1$ и $\sigma(\varepsilon_{inc} \approx W_1) \approx 1$, тогда, выражая из (4.75) величину W_1 через параметры ε_{m0} и σ_{m0} , получаем следующие соотношения:

$$1 \approx 1.8\sigma_{m0} \left(\frac{W_1}{\varepsilon_{m0}} \right)^{0.62} ; \quad \left(\frac{1}{W_1} \right)^{0.62} \approx 1.8\sigma_{m0} \left(\frac{1}{\varepsilon_{m0}} \right)^{0.62} \quad (4.76).$$

Поскольку величина W_1 хорошо известна из экспериментальных измерений для многих диэлектриков и металлов, окончательно получаем зависимость КВЭЭ от энергии падающих электронов и от энергии, соответствующей первому критическому потенциалу W_1 , в виде:

$$\sigma(\varepsilon_{inc}) \approx \left(\frac{\varepsilon_{inc}}{W_1} \right)^{0.62} \quad (4.77).$$

Тогда подставляя (4.77) в уравнение (4.70) получаем уравнение баланса потока электронов:

$$\int_0^\infty \left(\varepsilon_{inc}/W_1 \right)^{0.62} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{zo}}{T_e}\right) d\varepsilon_{zo} = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\varepsilon_{zo}}{T_e}\right) d\varepsilon_{zo} \quad (4.78).$$

Это интегральное уравнение не решается в элементарных функциях. Поэтому целесообразно до численного интегрирования (4.78) сначала сравнить подынтегральные выражения и получить приближенную оценку плотности электронов вблизи поверхности диэлектрика.

При условии $(\varepsilon_{inc}/W_1)^{0.62} = 1$; $\varepsilon_{inc} = W_1$, тогда из (4.68) получаем выражение для оценки плотности электронов вблизи поверхности диэлектрика:

$$\varepsilon_{\text{inc}} = W_1 = \frac{E_x^2}{4n_0} \exp\left(\frac{\varepsilon_{zo}}{T_e}\right) \left[\text{erf}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{zo}}{2T_e}}\right) \right]^2 \quad (4.79).$$

$$n_0 = \frac{E_x^2}{4W_1} \exp\left(\frac{\varepsilon_{zo}}{T_e}\right) \left[\text{erf}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{zo}}{2T_e}}\right) \right]^2$$

Для значений $\varepsilon_{zo} \approx T_e$; $\sqrt{\frac{\varepsilon_{zo}}{2T_e}} \approx 0.71$; $\Phi(0.71) \approx 0.71$ получаем выражение

для оценки плотности электронов вблизи поверхности диэлектрика:

$$n_0 \approx \frac{E_x^2}{4W_1} \exp\left(\frac{\varepsilon_{zo}}{T_e}\right) \left[\text{erf}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{zo}}{2T_e}}\right) \right]^2 \approx \frac{E_x^2}{W_1} \frac{2.72}{4} (0.71)^2 \approx 0.34 \frac{E_x^2}{W_1} \quad (4.80).$$

Численное интегрирование (4.78) дает более точное выражение для расчета плотности электронов n_0 вблизи поверхности диэлектрика, которое в два раза больше оценки (4.80):

$$n_0 \approx 0.7 \frac{E_x^2}{W_1} \quad (4.81).$$

Удельная мощность, передаваемая единице поверхности диэлектрика электронами, бомбардирующими поверхность диэлектрика, при использовании выражения (4.68) для энергии электронов, падающих на поверхность диэлектрика, и при учете $V_T = \sqrt{\frac{2T_e}{m_e}}$ определится следующим интегралом:

$$\begin{aligned}
W_{abs} &= \int_0^\infty \frac{n_0 \sqrt{m_e}}{\sqrt{2\pi T_e}} \varepsilon_{inc}(V_{z0}) V_{z0} \exp(-m V_{z0}^2 / 2T_e) dV_{z0} = \\
&= \int_0^\infty \frac{n_0}{\sqrt{2\pi T_e}} \frac{1}{\sqrt{m_e}} \varepsilon_{inc}(\varepsilon_{z0}) \exp(-\varepsilon_{z0} / T_e) d\varepsilon_{z0} = \\
&= \int_0^\infty \frac{n_0}{\sqrt{\pi m_e} V_T} \frac{E_x^2}{4n_0} \exp(\varepsilon_{z0} / T_e) \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{z0}}{2T_e}}\right) \right]^2 \exp(-\varepsilon_{z0} / T_e) d\varepsilon_{z0} = \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi m_e} V_T} \frac{E_x^2}{4} \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{z0}}{2T_e}}\right) \right]^2 d\varepsilon_{z0} = \frac{\sqrt{\pi}}{m_e V_T} \frac{E_x^2}{4\pi} \int_0^\infty \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{z0}}{2T_e}}\right) \right]^2 d\varepsilon_{z0} = \\
&= \frac{\sqrt{\pi} V_T}{2T_e} \frac{E_x^2}{4\pi} \int_0^\infty \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{z0}}{2T_e}}\right) \right]^2 d\varepsilon_{z0} \tag{4.82}
\end{aligned}$$

Функция ошибок выражается через бесконечный ряд, и ее характерных вид в области значений аргумента от 0 до 1 (см. рис.4.9) может быть аппроксимирован практически линейной функцией со значениями в этом интервале от 0 до 1. При значениях аргумента более 1 значение функции ошибок практически постоянно и равно 1, следовательно, интеграл от квадрата функции ошибок в пределах значений энергии электронов от 0 до ∞ расходится. Однако из физических соображений ясно, что имеется максимальное значение энергии электронов $\varepsilon_{z0\max}$, падающих на

поверхность диэлектрика, и это значение ограничено амплитудой осцилляторной энергии $\varepsilon_{inc} \approx \varepsilon_{osc} = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \square W_1$, величина которой существенно превосходит энергию первого критического потенциала W_1 .

Подставляя выражение для плотности электронов вблизи поверхности диэлектрика (4.81) в формулу для энергии падающих на диэлектрик электронов (4.68), заменяя квадрат функции ошибок на численное значение приблизительно равное 1, получим следующее выражение для энергии электронов:

$$\varepsilon_{inc} = \frac{E_x^2}{4n_0} \exp\left(\frac{\varepsilon_{zo}}{T_e}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{zo}}{2T_e}}\right) \right]^2; n_0 \approx 0.7 \frac{E_x^2}{W_1} \quad (4.83).$$

$$\varepsilon_{inc} \approx \frac{W_1}{2.8} \exp\left(\frac{\varepsilon_{zo\max}}{T_e}\right)$$

Отсюда, при условии $\varepsilon_{inc} \approx \varepsilon_{osc} \ll W_1$ получаем оценку величины максимальной энергии в потоке падающих на диэлектрик электронов:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{inc} \approx \varepsilon_{osc} \approx \frac{W_1}{2.8} \exp\left(\frac{\varepsilon_{zo\max}}{T_e}\right) &\Rightarrow \ln\left[2.8 \frac{\varepsilon_{osc}}{W_1}\right] \approx \frac{\varepsilon_{zo\max}}{T_e}; \\ \varepsilon_{zo\max} &\approx T_e \ln\left[2.8 \frac{\varepsilon_{osc}}{W_1}\right] \approx T_e \left[1 + \ln\left(\frac{\varepsilon_{osc}}{W_1}\right)\right] \approx T_e \ln\left(\frac{\varepsilon_{osc}}{W_1}\right) \end{aligned} \quad (4.84).$$

Окончательно, подставляя (4.84) в (4.82), получаем выражение для поглощенной энергии в единице площади диэлектрика на стадии насыщения мультипакторного разряда W_{abs} в следующем виде:

$$W_{abs} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} V_T \left(E_x^2 / 4\pi \right) \ln(\varepsilon_{osc} / W_1) \quad (4.85).$$

Усредняя по периоду величину $\langle E_x^2 \rangle = \langle E_0^2 \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} E_0^2$, и производя деление на интенсивность падающего СВЧ излучения $I = \frac{E_0^2}{8\pi} c$, получаем выражение для коэффициента поглощения СВЧ излучения K_{MW} единицей площади диэлектрика в развитом мультипакторном разряде в режиме насыщения:

$$\begin{aligned} K_{MW} = \frac{W_{abs}}{I} &= \frac{V_T \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(E_0^2 / 8\pi \right) \ln(\varepsilon_{osc} / W_1)}{c E_0^2 / 8\pi} \\ K_{MW} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{V_T}{c} \ln(\varepsilon_{osc} / W_1) \end{aligned} \quad (4.86).$$

Поскольку величина осцилляторной энергии пропорциональна интенсивности СВЧ излучения $\varepsilon_{osc} \sim I = \frac{E_0^2}{8\pi} c$, то коэффициент поглощения

довольно слабо (логарифмически) зависит от интенсивности СВЧ излучения, но пропорционален тепловой скорости вторично–эмиссионных электронов, величина которой практически постоянна в широком интервале значения энергии падающих электронов.

Задача 4.2

Определить возможность возбуждения нерезонансного мультипакторного разряда на поверхности диэлектрического монокристаллического фторида лития (LiF), для которого энергия первого критического потенциала составляет величину $W_1 \approx 14.5 \text{ эВ}$. Рассчитать величину коэффициента удельного поглощения мультипакторным разрядом СВЧ излучения длиной волны 12 см интенсивностью 100 кВт/см^2 , длительностью импульса 1 мкс. Оценить величину градиента температуры, возникающего в поверхностном слое кристалла.

Решение

Рассчитаем пороговое значение амплитуды электрического СВЧ поля для возбуждения нерезонансного мультипакторного разряда на поверхности кристалла LiF:

$$\varepsilon_{osc} = \frac{e^2 E_{0П}^2}{2m_e \omega^2} = W_1$$

$$E_{0П} = \sqrt{\frac{2m_e \omega^2 W_1}{e^2}} = \frac{\omega}{e} \sqrt{2m_e W_1} = \frac{2\pi c}{\lambda e} \sqrt{2m_e W_1}$$

$$E_{0П} \approx \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{12 \cdot 4.8 \cdot 10^{-10}} \sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 14.5 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}} \approx 6.72 (\text{CGSE}) = 2016 \text{ В/см}$$

Величину амплитуды электрического СВЧ поля в потоке СВЧ излучения с интенсивностью $I = 100 \text{ кВт/см}^2$ определим из формулы:

$$I = \frac{E_0^2}{8\pi} c; \quad E_0 = \sqrt{\frac{8\pi I}{c}} \approx \sqrt{\frac{8 \cdot 3.14 \cdot 10^5 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^{10}}} \approx 28.9 (\text{CGSE}) = 8670 \text{ В/см}$$

Таким образом, величина амплитуды электрического поля в потоке СВЧ излучения превосходит пороговое значение нерезонансного мультипакторного разряда в 4 раза, а по интенсивности воздействующее СВЧ

излучение превосходит пороговое значение в 16 раз. В этом случае можно считать, что реализуется режим насыщения мультипакторного разряда, и применима формула (4.86) для расчета удельного поглощения СВЧ излучения в мультипакторном разряде, возбуждаемом на поверхности монокристалла LiF:

$$K_{MW} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{V_T}{c} \ln(\epsilon_{osc} / W_1).$$

Поскольку в формулу входит тепловая скорость вторично-эмиссионных электронов, энергия которых превосходит 2 эВ, то значение тепловой скорости составит:

$$V_T = \sqrt{\frac{2T_e}{m_e}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}}{9.1 \cdot 10^{-28}}} \approx 0.7 \cdot 10^8 \text{ см/с}.$$

Величина осцилляторной энергии электронов в потоке СВЧ излучения длиной волны 12 см и интенсивностью 100 кВт/см² будет равна:

$$\epsilon_{osc} = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} = \frac{e^2 E_0^2}{2m(\frac{2\pi c}{\lambda})^2} \approx \frac{(4.8 \cdot 10^{-10})^2 (28.9)^2}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot (\frac{2 \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{12})^2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}} \approx 268 \text{ эВ}$$

Величина удельного коэффициента поглощения мультипакторного разряда составит:

$$K_{MW} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{V_T}{c} \ln(\epsilon_{osc} / W_1) \approx \frac{0.7 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^{10}} \cdot \frac{\sqrt{3.14}}{2} \cdot \ln(\frac{268}{14.5}) \approx 0.625 \cdot 10^{-2} = 0.625\%$$

Поскольку электроны мультипакторного разряда бомбардируют поверхность кристалла, то поток энергии этих электронов поглощается в поверхностном слое кристалла. Пробег электронов в конденсированном веществе при энергиях до 10 кэВ определяется приближенной формулой:

$$l_e \approx 10^{-9} \frac{\mathcal{E}_{inc}^{1.4}}{\rho_V},$$

здесь $\mathcal{E}_{inc}$ – энергия электронов (в эВ), бомбардирующих поверхность кристалла в мультипакторном разряде, ρ_V – объемная плотность материала

кристалла, l_e – усредненная длина пробега электронов в см. Для для монокристаллического фторида лития LiF порог возбуждения мультипактора для энергии электронов определится как $\mathcal{E}_{inc} \approx W_1 = 14.5 \text{ эВ}$. При $\rho_V \approx 2.6 \text{ г/см}^3$ расчетная длина пробега электронов в кристалле составит всего $l_e \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Средний пробег электронов составляет всего несколько ангстрем, но вследствие теплопроводности материала кристалла тепло и температура будут быстро распространяться от поверхности в глубину кристалла. За время действия импульса электронов длительностью τ глубина прогрева составит величину $a \approx \sqrt{\chi \tau}$, где χ – температуропроводность кристалла. Для кристалла LiF величина $\chi \approx 0.0027 \text{ см}^2/\text{с}$, и глубина распространения температуры будет равна $a \approx \sqrt{\chi \tau} \approx \sqrt{0.0027 \cdot 10^{-6}} \approx 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$. Из теории теплопроводности известно, что при поверхностном выделении энергии величину скачка температуры ΔT в приповерхностном слое кристалла можно рассчитать по формуле:

$$\Delta T \approx \frac{2kI}{\mu \rho_V} \sqrt{\frac{\tau}{\chi}} \approx \frac{2 \cdot 0.625 \cdot 10^{-2} \cdot 10^5}{1.7 \cdot 2.6} \sqrt{\frac{10^{-6}}{0.0027}} \approx 5.4^\circ \text{ К},$$

здесь $\mu = 1.7 \text{ Дж/гК}$ – теплоемкость материала кристалла LiF. Скачок температуры в одном импульсе небольшой, а градиент температуры $grad(T)$ огромный:

$$grad(T) \approx \frac{\Delta T}{a} \approx \frac{5.4 \text{ К}}{0.5 \cdot 10^{-4} \text{ см}} \approx 10.8 \cdot 10^4 \frac{\text{К}}{\text{см}}$$

Таким образом, при условии низкой теплопроводности диэлектрика LiF, при малой глубине проникновения электронов в диэлектрик и небольшой толщине прогрева поверхностного слоя около 1 мкм однократный импульсный поток электронов мультипакторного разряда длительностью около 1 мкс создает очень большие градиенты температуры в поверхностном

слое кристалла порядка $10^5 \frac{\text{K}}{\text{см}}$. Такие градиенты температуры в кристалле приводят к появлению разрушений в виде множества микротрещин сначала вблизи поверхности кристалла, а при воздействии нескольких тысяч импульсов мультипакторного разряда возможно появление катастрофических разрушений диэлектрика в виде глубоких трещин в объеме и даже полного разрушения кристалла.

Задача 4.3

Рассчитать пороговую СВЧ мощность, необходимую для возбуждения нерезонансного мультипакторного разряда на поверхности монокристалла фторида лития (LiF). СВЧ излучение с линейной частотой $f=2\text{ГГц}$ сфокусированно в большой вакуумной камере в фокусное пятно с гауссовым распределением интенсивности с характерным диаметром $2a=16\text{ см}$. Принять, что величина энергии, при которой коэффициент вторичной электронной эмиссии с поверхности LiF равен 1 $W_1=14.5\text{ эВ}$.

Решение

Порог возбуждения мультипакторного разряда нерезонансного типа на поверхности кристалла определяется формулой $\frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} = W_1$, где E_0 - амплитуда электрической компоненты СВЧ поля в центре фокусного пятна, m - масса электрона, ω - круговая частота СВЧ поля, e - заряд электрона.

Величина E_0 связана с интенсивностью I_0 в центре фокуса СВЧ пятна следующим соотношением $I_0 = \frac{E_0^2}{8\pi} c$, здесь c - скорость света в вакууме.

Величину полной СВЧ мощности в фокусе рассчитаем исходя из гауссового распределения интенсивности

$$P = \int_0^{\infty} I_0 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) 2\pi r dr = \pi a^2 I_0 = \pi a^2 \frac{E_0^2}{8\pi} c$$

Учитывая, что линейная частота и круговая связаны соотношением $\omega = 2\pi f$, получим формулу для расчета пороговой СВЧ мощности

$$P = \pi a^2 \frac{E_0^2}{8\pi} c = \pi a^2 \frac{2m4\pi^2 f^2 W_1}{8\pi e^2} c = \frac{mc\pi^2 a^2 f^2 W_1}{e^2} =$$

$$\approx \frac{9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 10 \cdot 64 \cdot 4 \cdot 10^{18} \cdot 14.5 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}}{23 \cdot 10^{-20} \cdot 10^7} \approx 6.8 \cdot 10^5 \text{ Вт} = 0.68 \text{ МВт}$$

Здесь для выражения величины мощности СВЧ излучения в Вт применялись коэффициенты пересчета эВ в эрг ($1.6 \cdot 10^{-12}$ эрг/эВ) и эрг/с в Вт (10^7 эрг/сВт).

Заключение к лекции 4

Таким образом, на поверхности твердых тел в вакууме могут существовать несколько типов безэлектродных электронных микроволновых разрядов – мультипакторов. В общем случае, для возникновения и поддержания мультипакторных разрядов необходимо превысить соответствующую пороговую напряженность электрического СВЧ поля, а также должны существовать силы, возвращающие электроны к поверхности.

Самый низкий порог возникновения разряда соответствует резонансному поперечному вторично–эмиссионному электронному разряду (мультипактору), для которого выполняется пороговое условие $\frac{2e^2 E_{0\perp}^2}{m\omega^2} = W_1$ (W_1 – энергия электронов, соответствующая первому критическому потенциалу).

Для оценки порога нерезонансного продольного мультипакторного разряда по энергии осцилляции электрона в СВЧ поле можно применять простую формулу $\frac{e^2 E_{0\parallel}^2}{2m\omega^2} \approx W_1$, из которой можно рассчитывать пороговое электрическое СВЧ поле и пороговую интенсивность I СВЧ излучения по известному значению энергии первого критического потенциала W_1 .

Исследования мультипакторных разрядов являются актуальными в настоящее время, и представляют значительный интерес для физики плазмы

СВЧ газового разряда, физики взаимодействия плазмы с твердыми материалами в СВЧ поле, вторично–эмиссионной СВЧ электроники диэлектриков, люминесценции и спектроскопии кристаллов в СВЧ поле, радиационной физики материалов. Рассматриваемые явления находятся на стыке многих традиционных областей физики, поэтому их исследование способствует установлению между ними новых связей, проявляющихся при сильном возбуждении диэлектриков в СВЧ разрядах.

В последние годы становятся актуальными прикладные исследования в области взаимодействия микроволновых разрядов с твердыми телами для решения задач технологии обработки диэлектриков, полупроводников и металлов. Для технологических целей (например, обработка диэлектрических материалов низкоэнергетичными электронными потоками мультипакторного разряда) наиболее перспективными являются нерезонансные типы вторично–эмиссионных электронных микроволновых разрядов. Хотя для возбуждения этих типов разрядов необходимы более высокие значения интенсивностей СВЧ излучения, но для их поддержания не требуется выполнения “жестких” резонансных условий. В частности, формируемые в мультипакторных разрядах оптически плотные слои на монокристаллах фторида лития, двуокиси циркония и др., обусловлены возникновением высокой концентрации центров окраски в поверхностном слое в результате воздействия электронов мультипактора. Такие кристаллы со слоями с высокой концентрацией центров окраски являются лазерно активными средами, они могут найти применение в интегральной и волоконной оптике для создания миниатюрных лазеров и оптических усилителей, перестраиваемых в ближней инфракрасной области спектра, их использование также возможно в качестве оптических запоминающих сред.

Лекция 5. Движение электронов в пространственно неоднородном СВЧ поле $\vec{E}(x,t)$. Формирование одномерного высокочастотного квазипотенциала в конфигурации $\nabla \vec{E}^2(x,t) \uparrow \vec{E}(x,t) \uparrow \vec{e}_x$

В предыдущих лекциях мы рассматривали однородные в пространстве СВЧ поля. В волноводных устройствах, в физических экспериментах в свободном пространстве, а также в технологических установках микроволновые поля, как правило, неоднородны в пространстве. В этих условиях движение заряженных частиц приобретает новое качество: осциллируя в СВЧ поле они движутся против градиента квадрата электрической компоненты СВЧ поля. При этом сила, вызывающая такое движение не зависит от знака электрического заряда частиц, но обратно пропорциональна их массе.

Рассмотрим неоднородное СВЧ поле $E(x)$ с неоднородностью по оси Ox , т.е. будем рассматривать частный случай, когда градиент неоднородности поля коллинеарен вектору электрического СВЧ поля. Необходимо проверить, не возникают ли дополнительные поля из-за наличия неоднородной электрической компоненты СВЧ поля? Для этого воспользуемся первым уравнением Максвелла в виде (2.1):

$$\text{rot} \vec{E}(x,t) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E(x)\sin(\omega t - kz) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \{0; -kE(x)\cos(\omega t - kz); 0\} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}(x)}{\partial t}$$

$$-kE(x)\cos(\omega t - kz) = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y(x)}{\partial t} \quad (5.1.)$$

Интегрированием (5.1) по времени получаем выражение для осциллирующей магнитной компоненты СВЧ волны в виде:

$$H_y(x,t) = kcE(x) \int \cos(\omega t - kz) dt = \frac{kc}{\omega} E(x) \sin(\omega t - kz) \quad (5.2).$$

Так как $\frac{kC}{\omega}=1$, то из (5.2) следует, что имеется только магнитная компонента СВЧ волны, осциллирующая синхронно с электрической компонентой и амплитудой равной электрической компоненте. Таким образом, мы убедились, что в неоднородном СВЧ поле $E(x)$ с неоднородностью по оси OX , т.е. когда градиент неоднородности поля коллинеарен вектору электрического СВЧ поля, дополнительных компонентов не возникает. Тогда уравнение движения электрона в неоднородном СВЧ поле будет иметь вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{e}{m} E(x) \cdot \sin(\omega t - kz) \quad (5.3).$$

Будем рассматривать такие случаи неоднородности поля, когда осцилляции электрона в переменном поле $x_\omega(t)$ значительно меньше характерного масштаба неоднородности СВЧ поля L :

$$L = \frac{E(x)}{\frac{dE(x)}{dx}} = \frac{E(x)}{\nabla E(x)} = \left[\frac{\nabla E(x)}{E(x)} \right]^{-1} \gg |x_\omega(t)| = \left| \frac{eE(x)}{m\omega^2} \sin \omega t \right| \quad (5.4).$$

Для упрощения задачи, раскладываем в ряд Тейлора амплитуду поля $E(x)$ по малому параметру $\frac{x_\omega(t)}{L}$ вблизи произвольной точки с координатой x_0 :

$$E_x(x_0 + x_\omega(t)) \approx E_x(x_0) \left[1 + \frac{x_\omega(t)}{E_x(x_0)} \frac{dE_x(x_0)}{dx} + \dots + \frac{x_\omega^{n-1}(t)}{(n-1)! E_x(x_0)} \frac{d^{n-1}E_x(x_0)}{dx^{n-1}} + \dots \right] \quad (5.5)$$

В уравнении движения электрона будем учитывать первый и второй члены разложения поля (5.5). При этом второй член разложения мал по сравнению с первым, так как по величине он равен первому, умноженному на малый параметр $\frac{x_\omega(t)}{E_x(x_0)} \frac{dE_x(x_0)}{dx} = \frac{x_\omega(t)}{L}$. Следующий третий член разложения

является малым по сравнению со вторым членом и меньше его в $\frac{x_\omega(t)}{L}$ раз, и т.д. Не ограничивая общности рассмотрения, заменим в уравнениях произвольно выбранную точку X_0 на текущую координату электрона X . Учтем, что отсутствуют действия сил на электрон по другим осям координат кроме оси OX , тогда приближенное уравнение движения электрона в СВЧ поле с учетом неоднородности поля $E(x)$ по оси OX примет вид:

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -eE(x) \sin(\omega t) - ex_\omega(t) \frac{dE(x)}{dx} \sin(\omega t) \quad (5.6).$$

В правой части (5.6) имеется два члена, которые описывают движение электрона под действием двух сил: первый член это сила напрямую связана с осциллирующим электрическим полем, а второй член связан с пространственной неоднородностью этого поля, а именно, с градиентом неоднородности осциллирующего электрического поля. При этом второй член является малой силой по сравнению с большой силой, описываемой первым членом. Большая сила создает большое ускорение и заставляет частицу двигаться быстро, а малая сила, соответственно, создает малое ускорение и заставляет двигаться более медленно по сравнению с большой силой. Тогда представим левую часть уравнения (5.6) в виде суммы быстрого X_ω и медленного X_g движений $X = X_\omega + X_g$, и тогда уравнение (5.6) примет следующий вид:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{d^2 X_\omega}{dt^2} + \frac{d^2 X_g}{dt^2} = -\frac{e}{m} E(x) \sin(\omega t) - \frac{ex_\omega(t)}{m} \frac{dE(x)}{dx} \sin(\omega t) \quad (5.7).$$

Уравнение (5.7) представим в виде системы двух уравнений, в которых быстрое движение обусловлено большой силой, – первым членом правой части (5.7), а медленное движение малой силой, – вторым членом (5.7):

$$\frac{d^2 X_\omega}{dt^2} = -\frac{e}{m} E(x) \sin(\omega t) \quad (5.8),$$

$$\frac{d^2 x_g}{dt^2} = -\frac{ex_\omega(t)}{m} \frac{dE(x)}{dx} \sin(\omega t) \quad (5.9).$$

Решая уравнение (5.8), получим выражение для быстрых пространственных осцилляций:

$$x_\omega(t) = \frac{e}{m\omega^2} E(x) \sin(\omega t) \quad (5.10),$$

которое подставим в правую часть второго уравнения (5.9), и тогда получим уравнение для медленного движения электрона в виде:

$$m \frac{d^2 x_g}{dt^2} = -\frac{e^2}{m\omega^2} E(x_g) \frac{dE(x_g)}{dx_g} \sin^2(\omega t) \quad (5.11).$$

Усредним по периоду поля правую часть уравнения (5.11), и, учитывая, что $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$, получим усредненное уравнение (5.11) уже в модифицированном виде (далее индекс медленного движения при координате опустим $x_g \equiv x$):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{e^2}{2m\omega^2} E(x) \frac{dE(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} \left[\frac{e^2 E^2(x)}{4m\omega^2} \right] \quad (5.12).$$

Выражение в квадратных скобках называется высокочастотным квазипотенциалом или СВЧ квазипотенциалом $\Phi_\omega(x)$, градиент которого определяет силу, обуславливающую медленное усредненное движение осциллирующего электрона в неоднородном СВЧ поле:

$$\Phi_\omega(x) = \frac{e^2 E^2(x)}{4m\omega^2} \quad (5.13).$$

Усредненное уравнение движения электрона в неоднородном СВЧ поле можно представить и так:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{d}{dx} \left[\frac{e^2 E^2(x)}{4m\omega^2} \right] = -\frac{d}{dx} \Phi_\omega(x) \quad (5.14).$$

Уравнение движения (5.14) допускает нахождение первого интеграла движения для электрона в неоднородном СВЧ поле. Для этого умножим

левую и правую часть уравнения (5.14) на скорость медленного движения $\frac{dx}{dt}$, и, далее, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= - \frac{dx}{dt} \frac{d}{dx} \Phi_{\omega}(x), \\ \frac{dx}{dt} m \frac{d}{dt} \left[\frac{dx}{dt} \right] &= - \frac{d\Phi_{\omega}(x)}{dt} \\ \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left[\frac{dx}{dt} \right]^2 &= - \frac{d\Phi_{\omega}(x)}{dt} \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} m \left[\frac{dx_g}{dt} \right]^2 + \Phi_{\omega}(x) \right\} &= 0\end{aligned}\tag{5.15}.$$

Из выражения (5.15) можно получить первый интеграл движения осциллирующего электрона при его медленном перемещении в неоднородном СВЧ поле:

$$\frac{mV^2(t)}{2} + \Phi_{\omega}(x) = const\tag{5.16}.$$

Выражение (5.16) эквивалентно закону сохранения энергии электрона при его движении в неоднородном СВЧ поле, где в роли потенциальной энергии выступает средняя осцилляторная энергия электрона в СВЧ поле $\frac{e^2 E^2(x)}{4m\omega^2}$ в точке его нахождения, а в роли кинетической энергии выступает поступательная энергия медленного движения электрона в этом неоднородном СВЧ поле. Существенным является также независимость СВЧ квазипотенциала от знака заряда частицы, — сила, связанная с СВЧ квазипотенциалом одинаково действует как на положительные, так и на отрицательные заряженные частицы. Такие силы, действующие на частицы независимо от их знака заряда, называют иногда пондеромоторными силами, т.е. силами, сходными с силой давления в газах или жидкостях. Обратно пропорциональная зависимость этой силы от массы частицы остается, что дает в результате существенно более слабое прямое действие этой силы на

тяжелые заряженные частицы – ионы. Когда мы имеем дело с плазмой, то сильное воздействие градиента СВЧ квазипотенциала на электроны и их «выдавливание» из области с большим квазипотенциалом в область с малым СВЧ квазипотенциалом, то вследствие разделения зарядов возникают такие сильные электрические поля, которые действуют на ионы, и они начинают двигаться вслед за электронами. Таким образом, под действием СВЧ квазипотенциала вся плазма как целое выдавливается из области сильного осциллирующего поля в область более слабого осциллирующего поля.

В СВЧ технике возможно создание нескольких типов (мод) волн в волноводе с минимумом на его оси и нарастанием поля от оси к периферии. В этих условиях возможно движение плазмы к оси волновода, т.е. возможно наблюдение явления фокусировки первоначально широкого плазменного потока, запускаемого вдоль оси такой системы. Подобные явления, обусловленные действием СВЧ квазипотенциала, наблюдались многократно в экспериментах, и сверялись с теорией, и таким образом теория СВЧ квазипотенциала была проверена в нескольких частотных диапазонах.

Важно, что полученный результат можно обобщить не только на диапазоны высокочастотных и сверхвысокочастотных полей, но и на весь диапазон электромагнитных волн, включая диапазон лазерного излучения. Действие квазипотенциала было подтверждено во многих экспериментах при взаимодействии лазерного излучения с плазмой, и обнаружено множество явлений, которые были объяснены действием высокочастотного квазипотенциала.

Различие в действии СВЧ квазипотенциала на электроны и ионы может приводить к явлениям, которые наблюдались впервые в лазерном диапазоне длин волн с очень коротким импульсом. Так, для сфокусированного в плазму лазерного излучения с достаточно малой длительностью импульса наблюдалось такое явление: за время действия значительная часть электронов под действием ponderomotorной силы

выдавливается из плазмы, а ионы не успевают существенно сдвинуться. Это явление в научной литературе получило название «кулоновский взрыв», – ионы плазмы начинают разлетаться уже после окончания импульса лазерного излучения, и плазма «взрывается» под действием электростатического поля, обусловленного выбросом электронов из области фокуса лазерного излучения.

В качестве примера применения теории ВЧ-квазипотенциала для лазерного излучения рассмотрим следующую задачу.

Задача 5.1

Лазерное излучение длиной волны $\lambda = 1$ мкм фокусируется в пятно с гауссовым распределением интенсивности в водородной плазме. Характерный диаметр пятна по уровню интенсивности $1/e \approx 0.37$ ($e \approx 2.73$ – основание натурального логарифма) от максимальной величины в центре пятна равен 20 мкм. Полная мощность лазерного излучения в пятне равна 10^{10} Вт. Необходимо доказать возможность применения теории высокочастотного квазипотенциала, рассчитать ожидаемую максимальную энергию электронов, вылетающих из фокусного пятна во время действия импульса лазерного излучения и оценить минимальную длительность импульса лазерного излучения, для которой будет применима теория квазипотенциала.

Решение

Для гауссового симметричного по радиусу распределения интенсивности лазерного излучения $I(r)$ в фокусном пятне имеем следующее выражение:

$$I(r) = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right),$$

здесь I_0 – интенсивность лазерного излучения в центре фокусного пятна, r – текущий радиус, измеряемый от центра пятна, a – характерный пространственный масштаб гауссового распределения, при $r = a$

интенсивность излучения составляет величину, меньшую максимальной интенсивности в центре фокусного пятна в e раз. Пространственное распределение электрической компоненты СВЧ поля $E(r)$ в фокусе имеет вид:

$$E(r) = E_0 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right),$$

E_0 – амплитуда электрического поля в центре фокусного пятна.

Полная мощность лазерного излучения, сконцентрированного в фокусное пятно, может быть определена через интеграл функции распределения интенсивности излучения по радиусу в фокусном пятне:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\infty I(r) 2\pi r dr = \int_0^\infty I_0 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) 2\pi r dr = \\ &= \pi a^2 I_0 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) d\left(\frac{r^2}{a^2}\right) = \pi a^2 I_0 \end{aligned}$$

Характерный диаметр фокусного пятна определим как $2a = 20$ мкм, и радиус пятна $a = 10$ мкм. Интенсивность в центре фокусного пятна можно рассчитать по формуле:

$$I_0 = \frac{P}{\pi a^2} \approx \frac{10^{10} \text{ Вт}}{3.14 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2} \approx 0.3 \cdot 10^{16} \text{ Вт/см}^2.$$

Величину электрической компоненты СВЧ поля рассчитаем по формуле:

$$E_0 = \sqrt{\frac{8\pi I_0}{c}} \approx \left[\frac{8 \cdot (3.14) \cdot (0.3 \cdot 10^{16}) \cdot 10^7}{3 \cdot 10^{10}} \right]^{\frac{1}{2}} \approx 5 \cdot 10^6 \text{ (CGS)} = 1.5 \text{ ГВ/см}$$

Эта величина интенсивности лазерного излучения $\sim 10^{16}$ Вт/см² намного превышает значения, достигнутые в СВЧ диапазоне (10^9 Вт/см²). Интенсивности лазерного излучения $\sim 10^{16}$ Вт/см² достигаются во многих экспериментальных установках, а возникающие в фокусе при этом электрические поля существенно меньше значений, при которых

наблюдаются релятивистские эффекты. Для этого необходимы интенсивности более 10^{18} Вт/см². Рекордные интенсивности лазерного излучения приближаются к значениям $\sim 10^{23}$ Вт/см².

Продолжим расчеты параметров движения электронов при интенсивности $0.3 \cdot 10^{16}$ Вт/см². Амплитуда осцилляции электрона в электрическом лазерном поле величиной $5 \cdot 10^6$ (CGS) вычисляется по формуле:

$$x_{осц} = \frac{eE_0\lambda^2}{m(2\pi c)^2} \approx \frac{4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-8}}{9.1 \cdot 10^{-28} \cdot (2.3 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 10^{10})^2} \approx 7.4 \cdot 10^{-7} \text{ см} = 7.4 \cdot 10^{-3} \text{ мкм}$$

Характерный размер неоднородности поля в фокусе лазерного излучения на радиусе пятна r рассчитаем из выражения (5.1):

$$L = \left[\frac{1}{E} \frac{dE}{dx} \right]^{-1} \approx \left[\frac{E_0 \cdot \exp(-\frac{r^2}{2a^2})}{E_0 \cdot \exp(-\frac{r^2}{2a^2})} \cdot \frac{r}{a^2} \right]^{-1} \approx \frac{a^2}{r}.$$

Из этого выражения следует, что в фокальном пятне лазерного излучения при значении $a=10$ мкм для центральной области ($r=0.1 a$), для срединной области ($r=a$) и на периферии пятна ($r=100 a$), значения характерного размера неоднородности L составляют соответственно $L=10a=100$ мкм, $L=a=10$ мкм, $L=0.01a=0.1$ мкм. Таким образом, характерные размеры неоднородности лазерного поля существенно больше амплитуды осцилляции электрона 0.0074 мкм во всей области фокусного пятна, и, тем самым, правомочность применения теории высокочастотного квазипотенциала доказана для лазерного излучения.

Из выражения (5.16) можно записать следующие соотношения, позволяющие рассчитать энергию электронов, вылетевших из фокусного пятна лазерного излучения:

$$\begin{aligned}
m \frac{V^2(r=\infty)}{2} + \Phi_{\omega}(r=\infty) &= m \frac{V^2(r=0)}{2} + \Phi(r=0) \\
\varepsilon_e = m \frac{V^2(r=\infty)}{2} &= \Phi_{\omega}(r=0) = \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \approx \frac{e^2 E_0^2 \lambda^2}{16\pi^2 m c^2} \approx \\
&\approx \frac{(4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 5 \cdot 10^6)^2 \cdot 10^{-8}}{16 \cdot 9.86 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{20}} \text{ (CGS)} \approx 0.0279 \cdot 10^4 \text{ эВ} \approx 280 \text{ эВ}
\end{aligned}$$

Из приведенных расчетов получаем оценку ожидаемой максимальной энергии электронов, выходящих из фокуса лазерного луча вдоль направления электрической компоненты лазерного излучения, которая составляет величину около 280 эВ.

Оценим минимальную величину длительности лазерного импульса, при превышении которой справедлива теория квазипотенциала. Для этого необходимо, чтобы электрон за время своего медленного движения τ_m против градиента квазипотенциала в фокусе совершил несколько осцилляций, т.е. должно выполняться неравенство: время движения электрона по склону квазипотенциала должно быть существенно больше периода осцилляции поля $\tau_m \gg T = \frac{\lambda}{c}$. Проверим выполнение этого условия, рассчитав τ_m и сравнив его с периодом T :

$$\begin{aligned}
\tau_m &\approx \frac{a}{V_e} \approx \frac{a}{\frac{eE_0}{m\omega}} \approx \frac{am\omega}{eE_0} = \frac{2am\pi c}{e\lambda E_0} \approx \\
&\approx \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^6} \approx 0.7 \cdot 10^{-13} \text{ с} = 70 \text{ фс} \\
T &= \frac{\lambda}{c} \approx \frac{10^{-4} \text{ см}}{3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}}} \approx 3.3 \cdot 10^{-15} \text{ с} = 3.3 \text{ фс}
\end{aligned}$$

Таким образом, при $\tau_m \gg T$, т.е. за время действия лазерного импульса длительностью около 70 фс часть электронов покинут область фокусного пятна, совершив более 20 осцилляций, что достаточно для реализации действия квазипотенциала. Можно полагать, что при длительности импульса

даже $10T = 33$ фс ВЧ–квазипотенциал также проявит свое действие в значительной степени.

Интересно определить, как изменят свое положение ионы за время действия лазерного импульса длительностью 70 фс. Полагая, что некоторые ионы в результате действия кулоновского потенциала наберут энергию около 300 эВ, приблизительно равную энергии «выдавленных» из фокуса электронов, оценим смещение ионов за время 70 фс:

$$\Delta x_i \approx \tau_m V_i = \tau_m \sqrt{\frac{2\varepsilon_i}{M_i}} \approx \tau_m \sqrt{\frac{2\varepsilon_e}{M_i}} \approx 70 \cdot 10^{-15} \sqrt{\frac{2 \cdot 300 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}}{1840 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28}}} \approx 0.017 \text{ мкм}$$

Такое смещение 0.017 мкм существенно меньше размера радиуса фокусного пятна 10 мкм, и, таким образом, ионы за время действия лазерного импульса 70 фс практически остаются на месте, и, следовательно, в этих условиях возможно наблюдение явления разлета ионов из фокуса в виде «кулоновского взрыва» плазмы уже после окончания лазерного импульса.

Лекция 6. Движение электронов в неоднородных полях СВЧ волны и формирование трехмерного высокочастотного квазипотенциала

В предыдущей лекции 5 мы рассматривали движение заряженных частиц в неоднородном в пространстве СВЧ поле в условиях, когда градиент неоднородности поля коллинеарен вектору электрической компоненты поля. В данной лекции будем рассматривать движение заряженных частиц в условиях, когда градиент неоднородности поля ортогонален вектору электрической компоненты СВЧ поля, т.е. коллинеарен вектору магнитной компоненты СВЧ поля.

Будем полагать, что квазиплоская электромагнитная волна распространяется вдоль направления оси OZ , вектор электрической компоненты волны направлен по оси OX , а амплитуда электрического поля волны изменяется в зависимости от координаты вдоль оси OY . Тогда компоненты электрического поля электромагнитной волны можно представить в виде:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \{E_x(y); 0; 0\} \cdot \sin(\omega t - kz) \quad (6.1).$$

Здесь k – волновое число электромагнитной волны ($k = 2\pi/\lambda$), λ – длина волны в свободном пространстве.

В пространственно неоднородном осциллирующем электрическом поле на основании уравнений Максвелла помимо магнитной компоненты вдоль оси OY должна возникать и магнитная компонента поля, направленная вдоль оси OZ . Уравнение Максвелла, связывающее неоднородное электрическое поле с магнитной компонентой, имеет вид:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (6.2).$$

Левую часть векторного уравнения (6.2) можно переписать в виде определителя:

$$rot\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(y)\sin(\omega t - kz) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (6.3),$$

здесь векторы $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ – это единичные векторы, направленные по осям OX , OY и OZ соответственно. Тогда вектор $rot\vec{E}$ будет иметь следующие компоненты:

$$rot\vec{E} = \left\{ 0; -kE_x(y)\cos(\omega t - kz); -\frac{\partial}{\partial y} E_x(y)\sin(\omega t - kz) \right\} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (6.4).$$

Учитывая (6.4), векторное уравнение (6.2) можно записать в виде двух скалярных дифференциальных уравнений:

$$-kE_x(y) \cdot \cos(\omega t - kz) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} H_y(t) \quad (6.5),$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} E_x(y) \cdot \sin(\omega t - kz) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} H_z(t) \quad (6.6).$$

Интегрируя левые части уравнений (6.5) и (6.6) по времени, и, полагая величины постоянных полей равных нулю, получим выражения для осциллирующих компонент магнитного поля по осям OY и OZ в виде:

$$H_y(y, t) = \frac{kc}{\omega} E_x(y) \sin(\omega t - kz) = E_x(y) \sin(\omega t - kz) \quad (6.7),$$

$$H_z(y, t) = -\frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial y} E_x(y) \cos(\omega t - kz) = \frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial y} E_x(y) \sin(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \quad (6.8).$$

Соотношение (6.7) – это связь в каждой точке пространства взаимно ортогональных компонент электромагнитной волны: электрической компоненты, осциллирующей по оси OX , и магнитной компоненты, осциллирующей по оси OY , которые осциллируют синфазно. Соотношение (6.8) определяет магнитную компоненту поля, осциллирующую уже коллинеарно оси OZ . Эта компонента магнитного поля обусловлена исключительно пространственной неоднородностью компонент

электромагнитной волны, и осциллирует с запаздыванием по фазе на $\pi/2$ относительно электрической и магнитной компонент исходной электромагнитной волны.

Сила Лоренца, действующая на электрон, может быть представлена в виде:

$$\vec{F} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} [\vec{V} \cdot \vec{H}] \quad (6.9),$$

здесь $\vec{V}$ – вектор скорости электрона, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ векторы электрической и магнитной компонент электромагнитной волны, соответственно, включая компоненту магнитного поля, осциллирующую коллинеарно оси OZ .

Рассчитаем компоненты силы Лоренца, определяемые векторным произведением скорости и магнитных компонент H_y и H_z электромагнитной волны:

$$[\vec{V} \cdot \vec{H}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ 0 & H_y & H_z \end{vmatrix} = \left\{ \frac{\partial y}{\partial t} H_z - \frac{\partial z}{\partial t} H_y; -\frac{\partial x}{\partial t} H_z; \frac{\partial x}{\partial t} H_y \right\} \quad (6.10).$$

Учитывая выражения для магнитных компонент (6.7) и (6.8), получим уравнения движения электрона по трем координатам в следующем виде:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= -eE_x(y) \sin(\omega t - kz) - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial y}{\partial t} H_z - \frac{\partial z}{\partial t} H_y \right) \\ m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= -\frac{e}{c} \left(-\frac{\partial X}{\partial t} H_z \right) \\ m \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{c} \left(\frac{\partial X}{\partial t} H_y \right) \end{aligned} \quad (6.11).$$

С учетом выражений (6.7) и (6.8), уравнения движения электрона могут быть представлены в следующем развернутом виде:

$$\begin{aligned}
m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -eE_x(y) \sin(\omega t - kz) + \frac{e}{c} \left[\frac{\partial y}{\partial t} \frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial y} E_x(y) \cos(\omega t - kz) + \frac{\partial z}{\partial t} E_x(y) \sin(\omega t - kz) \right] \\
m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{e}{c} \left[\frac{\partial x}{\partial t} \frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial y} E_x(y) \cos(\omega t - kz) \right] \\
m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{c} \left[\frac{\partial x}{\partial t} E_x(y) \sin(\omega t - kz) \right]
\end{aligned}
\tag{6.12}$$

Ограничиваясь рассмотрением только нерелятивистских скоростей электронов, будем считать малыми величинами отношения компонент скорости движения электрона к скорости света:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \ll 1; \quad \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \ll 1; \quad \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \ll 1
\tag{6.13}.$$

Тогда в уравнениях (6.12), можно пренебречь членами, содержащими малые параметры (6.13). Из (6.12) видно, что, в нерелятивистском приближении, силы, действующие на электрон вдоль оси OZ , малы, и электрон вдоль оси OZ практически не изменяет скорости. В этих условиях, не ограничивая общности рассмотрения, будем считать, что вдоль оси OZ начальная скорость электрона и его начальная координата могут быть приняты равными нулю. Поскольку по оси OZ электрон практически не движется, то на него действует только переменное во времени электрическое поле волны, а движение самой электромагнитной волны в пространстве на движении электрона не отражается. Тогда получим упрощенную систему приближенных уравнений, описывающих движение электрона в электромагнитной волне с неоднородным полем по оси OY :

$$\begin{aligned}
m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &\approx -eE_x(y) \sin(\omega t - kz) + \frac{e}{\omega} \left[\frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} E_x(y) \cos(\omega t - kz) \right] \\
m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{e}{\omega} \left[\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} E_x(y) \cos(\omega t - kz) \right] \\
m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &\approx 0
\end{aligned}
\tag{6.14}.$$

Так как в первых двух уравнениях (6.14) отсутствуют производные по z , то переменную z в них можно опустить, и уравнения (6.14) примут следующий еще более упрощенный вид:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -eE_x(y) \sin(\omega t) + \frac{e}{\omega} \left[\frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} E_x(y) \cos(\omega t) \right] \\ m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{e}{\omega} \left[\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} E_x(y) \cos(\omega t) \right] \end{aligned} \quad (6.15).$$

Далее будем рассматривать движение электрона вдоль каждой из осей OX и OY , состоящее из суперпозиции двух движений: быстрого движения x_ω , связанного с осцилляциями в электрическом поле электромагнитной волны, и медленных движений x_g и y_g , связанных с градиентом поля волны. Тогда текущие координаты движения электрона можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x &= x_g + x_\omega \\ y &= y_g \end{aligned} \quad (6.16).$$

Будем предполагать, также как и в лекции 5, что характерный масштаб неоднородности СВЧ поля L существенно больше амплитуды осцилляции электрона в поле электромагнитной волны:

$$L = \frac{E_x(y)}{\frac{\partial(E_x(y))}{\partial y}} \gg \left| \frac{eE_x(y)}{m\omega^2} \sin(\omega t) \right| \equiv |x_\omega(t)| \quad (6.17).$$

Для первого уравнения системы уравнений (6.15) можно показать, что первый член в правой части определяет быстрое осциллирующее движение электрона, и он существенно больше второго члена, который определяет медленное движение электрона. Второй член первого уравнения системы (6.15) можно преобразовать так, что в явном виде он будет содержать малый параметр вида $\frac{eE_x}{m\omega^2 L} \ll 1$. Для этого в правой части первого уравнения (6.15)

вынесем за скобку величину $E_x(y)$. Очевидно, что скорость электрона по

оси OY не превышает осцилляторную скорость электрона в электрическом поле волны, т.е. $\frac{\partial y}{\partial t} \leq \frac{eE_x(y)}{m\omega}$, тогда второй член в правой части первого уравнения (6.15) может быть оценен как малая величина по сравнению с первым членом из следующих соотношений:

$$\frac{1}{\omega} E_x(y) \left[\frac{\partial y}{\partial t} \frac{1}{E_x(y)} \frac{\partial}{\partial y} E_x(y) \right] = E_x(y) \frac{1}{\omega} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{1}{L} < E_x(y) \frac{eE_x}{m\omega^2} \frac{1}{L} \ll E_x(y)$$

Таким образом, из структуры первого уравнения системы (6.15) видно, что вдоль оси OX электрон совершает, в основном, быстрое движение в виде осцилляций в электрическом поле электромагнитной волны. Вдоль оси OY электрон совершает только медленное движение, обусловленное наличием градиента электромагнитного поля по оси OY . Для определения действующей силы по оси OY вычислим скорость $\frac{\partial x}{\partial t}$ быстрого осциллирующего движения электрона по оси OX из первого уравнения (6.15), принимая во внимание только первый член в его правой части. Затем, подставив вычисленную скорость осцилляции $\frac{eE_x(y)}{m\omega} \cos(\omega t)$ во второе уравнение (6.15), получим следующее выражение для медленного движения электрона по оси OY (далее при обозначении координаты медленного движения индекс будем опускать ($y_g \equiv y$)):

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{e}{\omega} \left[\frac{eE_x(y)}{m\omega} \frac{\partial}{\partial y} E_x(y) \cos^2(\omega t) \right] \quad (6.18).$$

Введя под знак дифференцирования стоящее перед пространственной производной выражение в правой части (6.18), усредняя правую часть уравнения (6.18) по периоду поля, т.е. учитывая, что $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$, получаем усредненное уравнение для медленного движения электрона по оси OY вида:

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \right] \quad (6.19).$$

Из уравнения (6.19) видно, что медленное движение электрона в пространственно неоднородном электрическом поле (градиент неоднородности поля коллинеарен оси OY при ориентации электрического вектора волны по оси OX), происходит сходным образом, как и в случае, когда градиент неоднородности коллинеарен электрической компоненте электромагнитного поля. Из уравнения (6.19) можно получить выражение для первого интеграла движения, который может быть аналогом закона сохранения энергии для медленного движения электрона при его движении против градиента квадрата переменного электрического поля.

Умножим обе части уравнения (6.19) на скорость $V(y) = \frac{\partial y}{\partial t}$ медленного движения по оси OY , и, проведя ниже следующие преобразования, переходим от частных к полным производным:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) &= - \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \right] \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] &= - \frac{d}{dt} \left[\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \right] \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \right] &= 0 \\ \frac{m}{2} V^2(y) + \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} &= const \end{aligned} \quad (6.20)$$

Таким образом, в неоднородном электрическом поле электромагнитной волны с градиентом неоднородности в перпендикулярном направлении к электрической компоненте поля помимо быстрого осциллирующего движения электрона в электрическом поле, появляется медленное движение электрона в направлении, перпендикулярном электрическому полю волны. Это медленное движение электрона в неоднородном СВЧ поле обусловлено силой (6.19), определяемой пространственной производной (градиентом)

скалярной величины $\Phi_{\omega} = \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2}$, а знак минус перед производной определяет направление действия усредненной силы на электрон, т.е. против направления градиента квадрата поля. Величину Φ_{ω} , стоящую под знаком градиента, по аналогии со скалярным потенциалом, можно определить как ВЧ или СВЧ квазипотенциал.

Задача 6.1

Лазерное линейно поляризованное излучение длиной волны $\lambda=10$ мкм фокусируется в пятно с гауссовым распределением интенсивности. Характерный диаметр пятна по уровню интенсивности $1/e \approx 0.37$ от максимальной величины в центре пятна равен 40 мкм. Полная мощность лазерного излучения в пятне равна 10^8 Вт.

1) Рассчитать величину электрического поля и интенсивность в центре фокальной области излучения. 2) Доказать возможность применения теории высокочастотного квазипотенциала. 3) Определить ожидаемую максимальную энергию электронов, вылетающих из фокусного пятна во время действия импульса лазерного излучения в направлении перпендикулярном вектору электрической компоненты лазерного излучения. 4) Рассчитать минимальную длительность импульса, при которой справедлива теория СВЧ квазипотенциала.

Решение

При гауссовом симметричном по радиусу распределении интенсивности излучения в фокусном пятне имеем распределение в виде:

$$I(r) = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \quad (6.23),$$

где I_0 – интенсивность лазерного излучения в центре фокусного пятна, r – радиус, измеряемый от центра пятна, a – характерный пространственный

масштаб гауссова распределения, равный радиусу, на котором интенсивность излучения $0.37I_0$.

Пространственное распределение электрической компоненты $E(r)$ СВЧ поля имеет вид:

$$E(r) = E_0 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) \quad (6.24),$$

где $E(r)$ – величина электрического поля на радиусе r , E_0 – амплитуда электрического поля в центре фокусного пятна.

Полная мощность лазерного излучения, сфокусированная в пятне, может быть определена как интеграл по радиусу распределения интенсивности в пятне:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\infty I(r) 2\pi r dr = \int_0^\infty I_0 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) 2\pi r dr = \\ &= \pi a^2 I_0 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) d\left(\frac{r^2}{a^2}\right) = \pi a^2 I_0 \end{aligned} \quad (6.25).$$

Характерный диаметр фокусного пятна определим так: $2a = 40$ мкм, и, соответственно, радиус пятна $a = 20$ мкм. Интенсивность в центре фокусного пятна можно рассчитать по формуле:

$$I_0 = \frac{P}{\pi a^2} \approx \frac{10^8 \text{ Вт}}{3.14 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2} \approx 8.6 \cdot 10^{12} \text{ Вт/см}^2$$

Величину электрической компоненты СВЧ поля рассчитаем по формуле:

$$E_0 = \sqrt{\frac{8\pi I_0}{c}} \approx \left[\frac{8 \cdot 3.14 \cdot 8.6 \cdot 10^{12} \cdot 10^7}{3 \cdot 10^{10}} \right]^{\frac{1}{2}} \approx 26.8 \cdot 10^4 (\text{CGS}) = 77.6 \cdot 10^6 \text{ В/см}.$$

Амплитуда осцилляции электрона в этом поле вычисляется по формуле:

$$X_0 = \frac{eE}{m\omega^2} \approx \frac{eE\lambda^2}{m(2\pi c)^2} \approx \frac{4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 28.6 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6}}{9.1 \cdot 10^{-28} \cdot (2 \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^{10})^2} \approx 0.04 \text{ мкм}$$

Характерный размер неоднородности СВЧ поля для произвольного радиуса рассчитаем из выражения (6.24) по формуле:

$$L = \left[\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial x} \right]^{-1} \approx \left[\frac{E_0 \exp(-\frac{r^2}{2a^2})}{E_0 \exp(-\frac{r^2}{2a^2})} \cdot \frac{r}{a^2} \right]^{-1} \approx \frac{a^2}{r} \quad (6.26).$$

Для радиуса вблизи центра лазерного фокуса $r \approx 0.1 a$ величина $L \approx 10 a \approx 200 \text{ мкм}$, соответственно для $r \approx a$ получаем $L \approx a \approx 20 \text{ мкм}$, а для удаленных от центра радиусов $r \approx 100 a$ значение $L \approx 0.01 a \approx 0.2 \text{ мкм}$. Из сравнения этих оценок с численной оценкой амплитуды осцилляции электрона $X_{осц} = \frac{eE}{m\omega^2} \approx 0.04 \text{ мкм}$ видно, что характерный размер неоднородности переменного электрического поля L на несколько порядков больше амплитуды осцилляции, что подтверждает правомочность применения теории высокочастотного квазипотенциала. Из выражения (6.22) для условий задачи можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} m \frac{V^2(r=\infty)}{2} + \Phi_\omega(r=\infty) &= m \frac{V^2(r=0)}{2} + \Phi_\omega(r=0) ; \\ \Phi_\omega(r=\infty) &= m \frac{V^2(r=0)}{2} = 0 ; \quad m \frac{V_{\max}^2}{2} = \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} = \frac{e^2 E_0^2 \lambda^2}{16\pi^2 m c^2} \approx \\ &\approx \frac{(4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 26.8 \cdot 10^4)^2 \cdot 10^{-6}}{16 \cdot 9.86 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{20}} (\text{CGSE}) \approx 1.27 \cdot 10^{-10} \text{ эрг} \approx 80 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

Таким образом, ожидаемая максимальная энергия электронов, выходящих из фокуса лазерного луча в направлении, перпендикулярном вектору электрического поля, составляет величину около 80 эВ. Скорость электронов с такой энергией существенно меньше скорости света, и, тем самым, нерелятивистская теория СВЧ квазипотенциала и примененные формулы расчеты величины СВЧ квазипотенциала справедливы.

Оценим минимальную величину длительности лазерного импульса, при превышении которой справедлива теория квазипотенциала. Для этого необходимо, чтобы электрон за время своего медленного движения τ_g против

градиента СВЧ квазипотенциала в фокусе совершил несколько осцилляций, т.е. должно выполняться неравенство: время движения электрона τ_g по склону СВЧ квазипотенциала должно быть существенно больше периода осцилляции поля $\tau_g \gg T = \frac{\lambda}{c}$. Проверим выполнение этого условия, рассчитав τ_g и сравнив его с периодом поля T :

$$\tau_g \approx \frac{a}{V_e} \approx \frac{a}{\frac{eE_0}{m\omega}} \approx \frac{am\omega}{eE_0} = \frac{2am\pi c}{e\lambda E_0} \approx$$

$$\frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-3} \cdot 26.8 \cdot 10^4} \approx 2.66 \cdot 10^{-12} \text{ с} = 2.66 \text{ пс}$$

$$T = \frac{\lambda}{c} \approx \frac{10^{-3} \text{ см}}{3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}}} \approx 33 \cdot 10^{-15} \text{ с} = 33 \text{ фс}$$

Таким образом, величина $\tau_g \square T$, т.е. за время действия лазерного импульса длительностью около 2.66 пс электроны покинут область фокусного пятна, совершив около 80 осцилляций, что достаточно для реализации процессов, обусловленных действием ВЧ квазипотенциала. Можно полагать, что при длительности импульса даже $10T=330$ фс СВЧ квазипотенциал также проявит свое действие.

Далее рассмотрим случай, когда квазиплоская электромагнитная волна распространяется вдоль оси OZ , вектор электрической компоненты волны коллинеарен оси OX , а амплитуда электрического поля волны изменяется в зависимости от координаты по оси OZ . Тогда компоненты электрического поля электромагнитной волны можно представить в виде:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \{E_x(z); 0; 0\} \cdot \sin(\omega t - kz) \quad (6.27).$$

Здесь k – волновое число электромагнитной волны $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ – длина волны в свободном пространстве.

В пространственно неоднородном осциллирующем электрическом поле на основании уравнений Максвелла помимо магнитной компоненты, осциллирующей по оси OY , должна возникать и магнитная компонента поля, осциллирующая по оси OZ . Уравнение Максвелла, связывающее электрическое и магнитное поля, имеет вид:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (6.28).$$

Левую часть векторного уравнения (6.28) можно переписать в виде определителя:

$$\text{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(z) \cdot \sin(\omega t - kz) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (6.29),$$

здесь векторы $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ – это единичные векторы, направленные по осям OX , OY и OZ соответственно.

Тогда вектор $\text{rot}\vec{E}$ будет иметь следующие компоненты:

$$\text{rot}\vec{E} = \left\{ 0; \frac{\partial}{\partial z} [E_x(z) \cdot \sin(\omega t - kz)]; 0 \right\} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (6.30).$$

Учитывая (6.30), векторное уравнение (6.28) можно записать в виде дифференциального уравнения вида:

$$\frac{\partial}{\partial z} [E_x(z) \cdot \sin(\omega t - kz)] = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} H_y(z, t) \quad (6.31),$$

$$\sin(\omega t - kz) \frac{\partial}{\partial z} E_x(z) + k E_x(z) \cos(\omega t - kz) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} H_y(z, t) \quad (6.32).$$

Интегрируя левые части уравнения (6.32) по времени и полагая величины постоянных полей равными нулю, получим выражения для осциллирующих компонент магнитного поля по оси OY в виде:

$$H_y(z, t) = \frac{c}{\omega} \cdot \cos(\omega t - kz) \frac{\partial}{\partial z} E_x(z) + \frac{kc}{\omega} E_x(z) \cdot \sin(\omega t - kz) \quad (6.33),$$

$$H_y(z,t) = -\frac{c}{\omega} \cdot \sin(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \frac{\partial}{\partial z} E_x(z) + E_x(z) \cdot \sin(\omega t - kz) \quad (6.34),$$

где учтено, что $\frac{kc}{\omega} = 1$

В соотношении (6.34) вторая магнитная компонента – это компонента исходной электромагнитной волны не связана с неоднородностью поля. Первая компонента (6.34) связана с неоднородностью поля, и эта осциллирующая компонента отстает по фазе от осцилляции поля исходной электромагнитной волны на четверть периода с запаздыванием по фазе на $\pi/2$.

Сила Лоренца, действующая на электрон, может быть выражена в виде:

$$\vec{F} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} \cdot [\vec{V} \cdot \vec{H}] \quad (6.35),$$

здесь $\vec{V}$ – вектор скорости электрона, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ векторы электрической и магнитной компонент электромагнитной волны соответственно, включая дополнительные компоненты магнитного поля, связанные с неоднородностью поля.

Определим компоненты силы Лоренца, связанные с магнитным полем:

$$-\frac{e}{c} [\vec{V} \cdot \vec{H}] = -\frac{e}{c} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{e}{c} \left\{ -\frac{\partial z}{\partial t} \cdot H_y; 0; \frac{\partial x}{\partial t} \cdot H_y \right\} \quad (6.36).$$

Учитывая эти компоненты, запишем уравнения движения электрона по трем координатам в следующем виде:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -eE_x(y) \cdot \sin(\omega t - kz) + \frac{e}{c} \frac{\partial z}{\partial t} \cdot H_y \\ m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 0 \\ m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{c} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \cdot H_y \right) \end{aligned} \quad (6.37).$$

С учетом выражения (6.34), уравнения движения электрона могут быть представлены в следующем развернутом виде:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -eE_x(z) \sin(\omega t - kz) + \frac{e}{c} \frac{\partial z}{\partial t} \left[-\frac{c}{\omega} \sin(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \frac{\partial}{\partial z} E_x(z) + E_x(z) \sin(\omega t - kz) \right] \\ m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 0 \\ m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{c} \left[-\frac{\partial x}{\partial t} \frac{c}{\omega} \sin(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \frac{\partial}{\partial z} E_x(z) + \frac{\partial x}{\partial t} E_x(z) \sin(\omega t - kz) \right] \end{aligned} \quad (6.38)$$

Ограничимся рассмотрением движения электронов только с нерелятивистскими скоростями, а также предположим слабую неоднородность электромагнитной волны. Это означает, что в первом уравнении (6.38) третий член мал по сравнению с первым в силу нерелятивистского характера движения, а отношение второго члена к первому также мало в силу слабой неоднородности полей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial x}{\partial t} \ll 1; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial y}{\partial t} \ll 1; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial z}{\partial t} \ll 1 \\ \frac{1}{\omega} \left| \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \right| \ll \frac{1}{\omega} \left| \frac{\partial x}{\partial t} \right| \frac{1}{L} = \frac{1}{L} \left| \frac{eE_x(z)}{m\omega^2} \sin \omega t \right| = \left| \frac{x_\omega}{L} \right| \ll 1 \end{aligned} \quad (6.39).$$

Учитывая (6.39), в уравнениях (6.38) можно пренебречь членами, содержащими эти малые параметры. В результате получим упрощенную систему приближенных уравнений, описывающих движение электрона в электромагнитной волне с неоднородным полем по оси OZ :

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &\approx -eE_x(z) \sin(\omega t - kz) \\ m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{e}{\omega} \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \sin(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \frac{\partial}{\partial z} E_x(z) \end{aligned} \quad (6.40).$$

Из первого уравнения (6.40) вычисляем скорость осцилляции электрона в электрическом поле волны $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{eE_x(z)}{m\omega} \cos(\omega t - kz)$, и

подставляем его во второе уравнение (6.40), тогда получим приближенное уравнение движения электрона по оси OZ :

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{e^2 E_x(z)}{m\omega^2} \cdot \cos^2(\omega t - kz) \frac{\partial}{\partial z} E_x(z) \quad (6.41).$$

После усреднения по периоду поля получим следующее приближенное уравнение для медленного движения электрона по оси OZ , обусловленное неоднородностью поля:

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \approx -\frac{e^2 E_x(z)}{2m\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} E_x(z) = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^2 E_x(z)}{4m\omega^2} \right] \quad (6.42)$$

Из уравнения (6.42) видно, что медленное движение электрона в пространственно неоднородном электрическом поле (градиент неоднородности поля коллинеарен оси OZ при ориентации электрического вектора волны коллинеарном оси OX), происходит в результате действия силы, направленной против градиента квадрата неоднородного поля. При этом выражение в квадратных скобках (6.42) можно представить в качестве потенциала, градиент которого создает силу, одинаково действующую на частицы независимо от знака заряда. Из уравнения (6.42) можно получить выражение для первого интеграла движения, который может быть аналогом закона сохранения энергии для медленного движения электрона при его движении в неоднородном электромагнитном поле.

Умножим обе части уравнения (6.42) на скорость электрона $V(z) = \frac{\partial z}{\partial t}$ по оси OZ , и затем, проведя ниже следующие преобразования, переходим от частных к полным производным:

$$\begin{aligned}
m \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) &= - \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \right] \\
\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 \right] &= - \frac{d}{dt} \left[\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \right] \\
\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \right] &= 0 \\
\frac{m}{2} V^2(z) + \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} &= \text{const}
\end{aligned} \tag{6.43}$$

Таким образом, в неоднородном электрическом поле электромагнитной волны с градиентом неоднородности по оси OZ , коллинеарным волновому вектору $\vec{k}$ и перпендикулярным электрическому и магнитному векторам волны, помимо быстрого осциллирующего движения электрона в электрическом поле волны, появляется медленное движение электрона по оси OZ . Это медленное движение электрона в неоднородном электромагнитном поле определяется пространственной производной величины, выражающейся через среднюю энергию осцилляции электрона в локальном электрическом поле волны. Пространственная производная скалярной величины $\Phi_\omega = \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2}$ является градиентом этой величины, а знак минус перед производной определяет направление действия усредненной силы на электрон, т.е. против направления градиента квадрата поля. Величину, стоящую под знаком градиента, по аналогии со скалярным потенциалом, можно также определить как ВЧ квазипотенциал.

Обобщая материалы лекций 5 и 6, можно заключить, что ВЧ квазипотенциал в неоднородном поле электромагнитной волны, может изменяться одновременно по нескольким координатам, тогда обобщенно усредненное по периоду поля выражение для СВЧ квазипотенциала $\Phi_\omega(x, y, z)$ может быть записано уже так:

$$\Phi_{\omega}(x, y, z) = \frac{e^2 E^2(x, y, z)}{4m\omega^2} \quad (6.44),$$

а уравнение для усредненного медленного движения электрона в неоднородном СВЧ поле может быть представлено в виде следующего уравнения:

$$m \frac{\partial \vec{V}_g(x, y, z)}{\partial t} = -grad \left[\frac{e^2 E^2(x, y, z)}{4m\omega^2} \right] = -\nabla \Phi_{\omega}(x, y, z) \quad (6.45),$$

Специфика СВЧ квазипотенциала состоит в том, что он возникает только в неоднородных электромагнитных (высокочастотном, СВЧ или лазерном) полях, а физическая причина его возникновения связана с особенностью осциллирующего движения заряженной частицы в неоднородных электромагнитных полях. Возникновение усредненной силы в осциллирующем пространственно неоднородном СВЧ поле связано с тем обстоятельством, что сила, действующая на заряженную частицу, и координата частицы находятся в противофазе. Когда осциллирующая частица отклоняется то в область сильного ВЧ поля, то в область слабого поля, и на нее всегда действует сила, направленная в обратном направлении. Эта сила из-за неоднородности поля больше там, где поле сильнее, и меньше там, где поле слабее. Таким образом, заряженная частица, сделав одно полное колебание, получает импульс, направленный из области сильного поля в область слабого поля, что и отражается в усредненном уравнении движения заряженной частицы в неоднородном осциллирующем поле. Поскольку интенсивность электромагнитного излучения пропорциональна квадрату электрической компоненты поля, то это означает, что СВЧ квазипотенциал пропорционален локальному значению интенсивности излучения. Сила, действующая на заряженную частицу в поле пространственно неоднородного СВЧ излучения, пропорциональна градиенту интенсивности и направлена всегда из области с большим значением интенсивности в область с малым значением. Давление

электрического поля пропорционально квадрату его значения в данной точке, а тогда можно сделать заключение, что заряженные частицы в неоднородном электромагнитном (СВЧ или лазерном поле) как бы выдавливаются силой высокочастотного давления или пондеромоторной силой. При этом пондеромоторная сила давления действует на заряженную частицу так, что она всегда направлена из области пространства с сильной интенсивностью в область с более слабой интенсивностью. Поскольку величина СВЧ квазипотенциала обратно пропорциональна квадрату частоты осциллирующего поля, то это означает, что высокочастотный квазипотенциал при одинаковых значениях квадрата электрического поля (или интенсивности электромагнитной волны) для более низкой частоты осцилляции всегда в квадрат отношения частот раз больше, чем для более высоких частот осцилляции. При равных интенсивностях СВЧ или лазерного излучения действие ВЧ квазипотенциала на более низкой СВЧ частоте в отношении квадратов частот будет действовать сильнее, чем на более высокой частоте лазерного излучения. Важно отметить, что это давление пропорционально квадрату заряда частицы, т.е. не зависит от знака электрического заряда частиц, но обратно пропорционально массе частицы. Поэтому ВЧ квазипотенциал существенно сильнее действует на электроны, чем на ионы. Однако в плазме при возникновении ВЧ давления на электроны при их движении против градиента электромагнитного осциллирующего поля возникают электрические поля, обусловленные разделением зарядов, которые действуют на ионы и тянут их вслед за электронами. Таким образом, ВЧ квазипотенциал может действовать на плазму в целом, что проверено во многих экспериментах в СВЧ диапазоне частот.

Задача 6.2

Линейно поляризованное СВЧ излучение длиной волны $\lambda=4$ см фокусируется в пятно с гауссовым распределением интенсивности.

Характерный диаметр фокусного пятна по уровню интенсивности $1/e \approx 0,37$ от максимальной величины интенсивности в центре пятна равен $2a_f = 4 \text{ см}$.

Полная мощность СВЧ излучения в пятне равна 20·МВт. Антенная решетка с апертурой 400 см формирует на своем срезе гауссово распределение СВЧ излучения с характерным диаметром $2a_A = 300 \text{ см}$ (рис.6.1).

1) Рассчитать величину электрического поля и интенсивность в центре фокальной области излучения.

2) Рассчитать зависимость величины интенсивности СВЧ излучения от координаты Z для фокусного расстояния 800 см.

3) Доказать возможность применения теории высокочастотного квазипотенциала.

4) Определить ожидаемую максимальную энергию электронов, вылетающих из фокусного пятна во время действия импульса СВЧ излучения в направлениях магнитной и электрической компонент СВЧ поля, а также в направлении волнового вектора СВЧ волны.

5) Рассчитать минимальную длительность импульса, при которой справедлива теория ВЧ квазипотенциала.

Решение 6.2

При гауссовом симметричном по радиусу распределении интенсивности излучения в фокусном пятне имеем распределение в виде:

$$I(r) = I_{0f} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{a_f^2}\right) \quad (6.46),$$

где I_{0f} – интенсивность СВЧ излучения в центре фокусного пятна, r – радиус, измеряемый от центра пятна, a_f – характерный пространственный масштаб распределения в фокусе, равный радиусу, на котором интенсивность излучения составляет величину в $e \approx 2.73$ раз (e – основание натурального логарифма) меньшую максимальной интенсивности в центре фокусного

пятна, т.е. $I(r = a_f) = I_{0f} \cdot \exp(-\frac{a_f^2}{a_f^2}) = I_{0f} \cdot \exp(-1) \approx 0.37 I_{0f}$.

Пространственное распределение электрической компоненты $E(r)$ СВЧ поля в фокусе имеет вид:

$$E(r) = E_{0f} \cdot \exp(-\frac{r^2}{2a^2}) \quad (6.47),$$

где $E(r)$ – величина электрического поля на радиусе r , E_{0f} – амплитуда электрического поля в центре фокусного пятна. Полная мощность СВЧ излучения, сфокусированная в пятне, может быть определена как интеграл по радиусу распределения интенсивности в пятне:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\infty I(r) 2\pi r dr = \int_0^\infty I_{0f} \exp(-\frac{r^2}{a_f^2}) 2\pi r dr = \\ &= \pi a^2 I_{0f} \int_0^\infty \exp(-\frac{r^2}{a_f^2}) d(\frac{r^2}{a_f^2}) = \pi a^2 I_{0f} \end{aligned} \quad (6.48).$$

Характерный диаметр фокусного пятна равен: $2a_f = 4\text{см}$, и, соответственно, радиус $a_f = 2\text{см}$. Интенсивность в центре фокусного пятна можно рассчитать из (6.48) по формуле:

$$I_{0f} = \frac{P}{\pi a_f^2} \approx \frac{2 \cdot 10^7 \text{ Вт}}{3.14 \cdot 4 \text{ см}^2} \approx 1.6 \cdot 10^6 \text{ Вт/см}^2.$$

Величину электрической компоненты СВЧ поля рассчитаем по формуле:

$$E_{0f} = \sqrt{\frac{8\pi I_{0f}}{c}} \approx \left[\frac{8 \cdot 3.14 \cdot 1.6 \cdot 10^6 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^{10}} \right]^{\frac{1}{2}} \approx 115.75 \text{ (CGS)} \approx 34.7 \text{ кВ/см}.$$

Амплитуда осцилляции электрона в этом поле вычисляется по формуле:

$$X_o = \frac{eE}{m\omega^2} \approx \frac{eE\lambda^2}{m(2\pi c)^2} \approx \frac{4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 115.75 \cdot 16}{9.1 \cdot 10^{-28} \cdot (2 \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^{10})^2} \approx 0.0275 \text{ см} \quad (6.49).$$

Характерный размер неоднородности СВЧ поля для произвольного радиуса в фокусе рассчитаем по формуле:

$$L = \left[\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial r} \right]^{-1} \approx \left[\frac{E_{0f} \cdot \exp(-\frac{r^2}{2a_f^2})}{E_{0f} \cdot \exp(-\frac{r^2}{2a_f^2})} \cdot \frac{r}{a_f^2} \right]^{-1} \approx \frac{a_f^2}{r} \quad (6.50).$$

Вблизи центра СВЧ фокуса при $r = 0.1a_f$ величина $L = 10a_f = 20$ см, соответственно для $r = a_f$ получаем $L = a_f = 2$ см, а для удаленной от центра области при радиусе $r = 10a_f$ значение $L = 0.1a_f = 0.2$ см. Из сравнения этих оценок с численной оценкой амплитуды осцилляций (6.49) видно, что характерный размер неоднородности СВЧ электрического поля L , по крайней мере, на порядок больше амплитуды осцилляции $X_o \approx 0.03$ см, что доказывает правомочность применения теории высокочастотного квазипотенциала. Из закона сохранения суммы энергии медленного движения и осцилляторной энергии электрона при движении в неоднородном СВЧ поле (6.43) для наших условий задачи можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} m \frac{V^2(r=\infty)}{2} + \Phi_\omega(r=\infty) &= m \frac{V^2(r=0)}{2} + \Phi_\omega(r=0) ; \\ \Phi_\omega(r=\infty) &= m \frac{V^2(r=0)}{2} = 0 ; \quad m \frac{V_{\max}^2}{2} = \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} = \frac{e^2 E_0^2 \lambda^2}{16\pi^2 m c^2} \approx \\ &\approx \frac{(4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 115.75)^2 \cdot 16}{16 \cdot 9.86 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{20}} (\text{CGSE}) \approx 382 \cdot 10^{-12} (\text{эрг}) \approx 240 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

Таким образом, ожидаемая максимальная энергия электронов, выходящих из фокуса СВЧ излучения в направлении, перпендикулярном вектору электрического СВЧ поля, составляет величину около 240 эВ. Скорость электронов с такой энергией существенно меньше скорости света, и, тем самым, нерелятивистская теория ВЧ квазипотенциала и примененные формулы и расчеты справедливы.

Оценим минимальную величину длительности СВЧ импульса, при превышении которой справедлива теория ВЧ квазипотенциала. Для этого

необходимо, чтобы электрон за время своего медленного движения τ_g против градиента квазипотенциала вблизи фокуса совершил несколько осцилляций. При этом должно выполняться неравенство: время движения электрона по склону ВЧ квазипотенциала должно быть существенно больше периода осцилляции СВЧ поля $\tau_g \gg T = \frac{\lambda}{c}$. Проверим выполнение этого условия,

оценив τ_g и сравнив его с периодом поля T :

$$\tau_g \approx \frac{a}{V_e} \approx \frac{a}{\frac{eE_{0f}}{m\omega}} \approx \frac{am\omega}{eE_{0f}} = \frac{2am\pi c}{e\lambda E_{0f}} \approx \frac{2 \cdot 2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 4 \cdot 115.75} \approx 0.15 \cdot 10^{-8} \text{ с} = 1.5 \text{ нс}$$

$$T = \frac{\lambda}{c} \approx \frac{4 \text{ см}}{3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}}} \approx 1.33 \cdot 10^{-10} \text{ с} = 0.133 \text{ нс}$$

Таким образом $\tau_g \gg T$, т.е. за время действия СВЧ импульса длительностью около 1.5 нс все электроны покинут область фокусного пятна, совершив около 11 осцилляций, что достаточно для проявления действия ВЧ-квазипотенциала.

Теперь рассчитаем неоднородность СВЧ поля в направлении волнового вектора $\vec{k}$. Для этого рассмотрим геометрию сфокусированного СВЧ излучения в пространстве между антенной и фокусным пятном (рис. 6.1). Будем исходить из закона сохранения мощности и формы пространственного распределения при фокусировке СВЧ излучения в пространстве между антенной решеткой и фокальной плоскостью. Тогда справедливо соотношение для мощностей в широком луче, выходящем из антенны АВ, и в сфокусированном луче, проходящем через фокальную плоскость ЕF:

$$\pi a_f^2 I_{0f} = \pi a_A^2 I_{0A} \quad (6.51),$$

здесь I_{0f} – интенсивность в центре фокальной плоскости ЕF, I_{0A} – интенсивность в центре плоскости антенны АВ. Для любой плоскости, перпендикулярной оси OZ в промежутке между антенной (АВ) и фокусом

(EF), максимальная интенсивность СВЧ волны I_{0z} будет также находиться на оси, проходящей через центр плоскости антенны и центр плоскости фокуса.

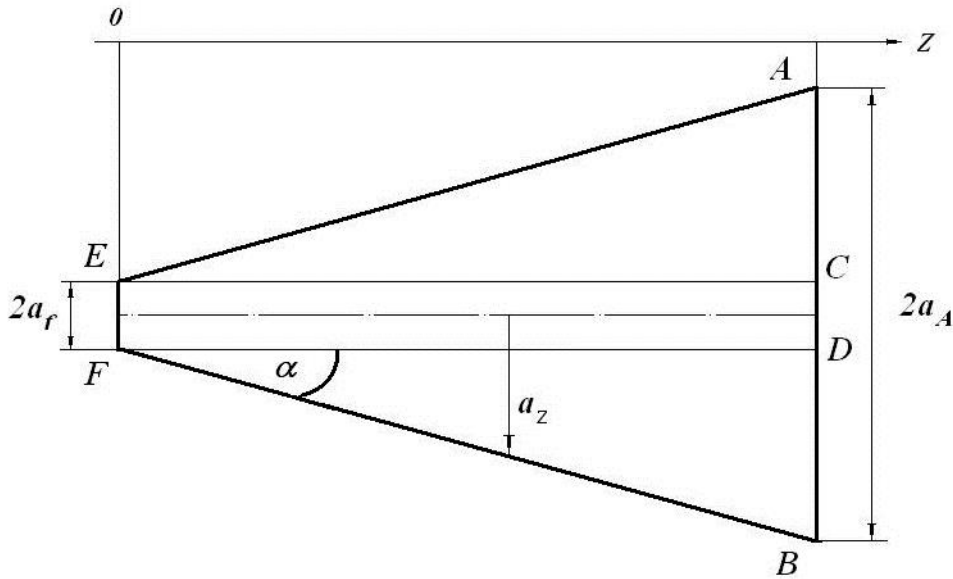


Рис. 6.1. Схема фокусировки СВЧ волны, распространяющейся от антенной решетки АВ к фокальной плоскости EF. Вблизи плоскости АВ формируется гауссово распределение интенсивности СВЧ излучения антенны с характерным радиусом a_A , гауссово распределение интенсивности в фокальной плоскости EF имеет характерный радиус a_f , α – угол схождения, образованный лучами BF и DF, соединяющие точки, расположенные на радиусах a_A и a_f соответственно.

На основании закона сохранения потока СВЧ энергии в сходящемся луче максимальная интенсивность в центре СВЧ луча I_{0z} на расстоянии Z от плоскости фокуса EF будет определяться соотношением:

$$I_{0z} \pi a_z^2 = I_{0f} \pi a_f^2 \quad (6.52).$$

Из геометрии сфокусированного СВЧ луча (рис. 6.1) соотношение между a_f и a_z определим так:

$$a_z - a_f = z \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (6.53),$$

тогда зависимость величины интенсивности СВЧ волны в промежутке между плоскостью фокуса и плоскостью антенны определится из выражения:

$$I_{0z} = I_{0f} \frac{\pi a_f^2}{\pi a_z^2} = I_{0f} \frac{\pi a_f^2}{\pi (a_f + z \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2} = I_{0f} \frac{1}{\left[1 + \frac{z \cdot \operatorname{tg} \alpha}{a_f}\right]^2} \quad (6.54).$$

Выражение для электрической компоненты СВЧ поля получим из (6.54) в виде:

$$E_x(z) = E_{0f} \frac{1}{\left[1 + \frac{z \cdot \operatorname{tg} \alpha}{a_f}\right]} \quad (6.55).$$

Определим характерный размер неоднородности поля $E_x(z)$:

$$L_z = \left| \frac{E_x(z)}{\frac{dE_x(z)}{dz}} \right| = \frac{E_{0f}}{\left[1 + \frac{z \cdot \operatorname{tg} \alpha}{a_f}\right]} \cdot \frac{\left[1 + \frac{z \cdot \operatorname{tg} \alpha}{a_f}\right]^2}{E_{0f} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{a_f}} = \frac{a_f + z \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (6.56).$$

Вычислим величину $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{DF} = \frac{\frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}EF}{DF} = \frac{a_A - a_f}{DF} = \frac{150 \text{ см} - 2 \text{ см}}{800 \text{ см}} = 0.185$

Характерная величина неоднородности L_z в центре фокуса при $z = 0$

согласно (6.56) равна $L_z = \frac{a_f}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{2 \text{ см}}{0.185} \approx 10.8 \text{ см}$. Амплитуда осцилляции

электрона в фокусе из формулы (6.49) равна: $X_o = \frac{eE_{0f}}{m\omega^2} \approx 0.0275 \text{ см}$. Видно,

что характерный размер неоднородности на 2 порядка больше амплитуды осцилляции электрона, следовательно, теория СВЧ квазипотенциала справедлива, и максимальная энергия электронов, вылетающих из области фокуса СВЧ волны коллинеарно оси OZ на удалении от фокальной плоскости, составит величину равную средней осцилляторной энергии электрона в фокусе 240 эВ.

Лекция 7. Движение электронов в однородном поле СВЧ волны $\vec{E}(t)$ и в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}_0$

В предыдущих лекциях 5 и 6 мы рассматривали движение электронов в пространственно неоднородном электромагнитном поле сверхвысокой частоты. В данной лекции мы изучим движение электронов в однородном осциллирующем электромагнитном СВЧ поле в условиях наложения постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$.

Рассмотрим электрон в плоской электромагнитной СВЧ волне и в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}_0$. Примем, что вектор осциллирующей электрической компоненты $\vec{E}$ электромагнитной СВЧ волны коллинеарен оси OX , вектор магнитной компоненты $\vec{H}$ этой волны соответственно коллинеарен оси OY , и волна распространяется в направлении оси OZ . Тогда электрическая и магнитная компоненты электромагнитной СВЧ волны могут быть представлены в виде следующих компонентов векторов:

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \{E_x; 0; 0\} \sin(\omega t - kz) \\ \vec{H}(x, y, z, t) &= \{0; H_y; 0\} \sin(\omega t - kz)\end{aligned}\tag{7.1},$$

здесь k – волновое число $k=2\pi/\lambda$, λ – длина волны, x, y, z – пространственные координаты, ω – круговая частота осциллирующих полей $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, c – скорость света в вакууме.

Будем рассматривать такие внешние постоянные однородные магнитные поля $\vec{H}_0$, которые по величине могут существенно превосходить величину магнитной компоненты H_y электромагнитной СВЧ волны. В

присутствие такого внешнего постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$ на электрон действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} [\vec{V} \times \vec{H}_0] \quad (7.2).$$

Из выражения (7.2) видно, что если вектор магнитного поля $\vec{H}_0$ коллинеарен вектору электрической компоненты СВЧ поля $\vec{E}$, а, следовательно, и вектору скорости электрона $\vec{V}$, которую он приобретает под действием электрического поля СВЧ волны, то второй член в выражении силы Лоренца (7.2), т.е. векторное произведение $[\vec{V} \times \vec{H}_0]$, станет равным нулю, и не будет влиять на движение электрона. В этом случае электрон будет двигаться в электрическом поле волны так же, как и в отсутствие магнитного поля (см. лекции 2 и 3).

Существенно отличающимся от случая коллинеарной ориентации вектора электрической компоненты электромагнитной СВЧ волны $\vec{E}$ и вектора постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$ будет случай, когда между вектором $\vec{E}$ и вектором $\vec{H}_0$ будет отличный от нуля угол. В этом случае набранная в осциллирующем поле волны $\vec{E}$ скорость частицы будет направлена коллинеарно этому полю, и при ориентации вектора магнитного поля $\vec{H}_0$ под углом к оси OX появится сила, связанная с постоянным магнитным полем $\vec{H}_0$. Максимальной по величине эта сила будет при взаимно перпендикулярной ориентации вектора электрической компоненты $\vec{E}$ электромагнитной СВЧ волны и вектора постоянного магнитного поля $\vec{H}_0$. Возможны два случая ортогональной ориентации этих векторов: первый случай, – когда вектор $\vec{H}_0$ направлен по оси OZ , второй случай, – когда вектор $\vec{H}_0$ направлен по оси OY .

Рассмотрим сначала первый частный случай взаимной ортогональной ориентации полей, – вектор постоянного однородного магнитного поля ориентирован по оси распространения волны OZ :

$$\vec{H}_0(x, y, z) = \{0; 0; H_0\} \quad (7.3),$$

где величина H_0 постоянна и однородна во всей области пространства.

Будем рассматривать здесь случаи, когда постоянное однородное магнитное поле $\vec{H}_0$ существенно превосходит магнитную компоненту электромагнитной волны. При этом во втором члене выражения для силы Лоренца (7.2) будем учитывать только постоянное магнитное поле $\vec{H}_0$, пренебрегая магнитной компонентой электромагнитной волны. Тогда второй член выражения силы Лоренца с учетом только $\vec{H}_0$ можно представить в следующем векторном виде:

$$-\frac{e}{c} [\vec{V} \times \vec{H}_0] = -\frac{e}{c} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ 0 & 0 & H_0 \end{vmatrix} = -\frac{e}{c} \left\{ \frac{\partial y}{\partial t} \cdot H_0; -\frac{\partial x}{\partial t} \cdot H_0; 0 \right\} \quad (7.4).$$

Здесь $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ – единичные векторы, ориентированные вдоль пространственных осей OX , OY и OZ соответственно. Тогда уравнения движения для электрона массой m с учетом (7.4) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -eE_0 \sin(\omega t - kz) - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \cdot H_0 \right) \\ m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{e}{c} \left(-\frac{\partial x}{\partial t} \cdot H_0 \right) \\ m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (7.5).$$

Из (7.5) видно, что силы, действующие на электрон по оси OZ , отсутствуют. Не ограничивая общности рассмотрения, тогда можно положить при дальнейшем рассмотрении, что $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ и $z = 0$. Тогда в аргументе синуса (7.5) можно ограничиться только временной частью, произведя замену $\sin(\omega t - kz) \Rightarrow \sin(\omega t)$, считая, что электрон находится в переменном электрическом поле и «не чувствует» движение электромагнитной СВЧ волны через пространство, в котором находится этот электрон. В то же время, из (7.5) ясно, что имеются силы, вызывающее движение по осям OX и OY .

Из уравнения движения по оси OX видно, что в нерелятивистском случае первый член, определяемый в основном электрической компонентой осциллирующего электромагнитного СВЧ поля, должен доминировать над вторым членом, который обусловлен действием на движущийся электрон постоянного магнитного поля $\vec{H}_0$. Тогда движение вдоль оси OX будет происходить подобно гармоническим осцилляциям с характерной круговой частотой ω , т.е. пропорционально $\sin \omega t$. Из второго уравнения (7.5) также видно, что движение электрона по оси OY также будет иметь вид осцилляций с круговой частотой ω , но уже пропорционально осцилляторной скорости электрона по оси OX , т.е. $\cos \omega t$.

Учитывая все вышеизложенное, будем искать решения уравнений (7.5), описывающие движения электрона с установившимися параметрами, в следующем виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 \cdot \sin(\omega t) \\ y(t) &= Y_0 \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (7.6),$$

здесь X_0 и Y_0 амплитуды осцилляций электрона по осям OX и OY соответственно.

Из общего вида решений (7.6) путем однократного и двукратного дифференцирования получим обобщенные выражения для скоростей и ускорений заряженной частицы в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} x(t) &= \omega X_0 \cdot \cos(\omega t) \\ \frac{\partial}{\partial t} y(t) &= -\omega Y_0 \cdot \sin(\omega t) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t) &= -\omega^2 X_0 \cdot \sin(\omega t) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t) &= -\omega^2 Y_0 \cdot \cos(\omega t)\end{aligned}\tag{7.7}.$$

Подставляя выражения (7.7) в систему уравнения (7.5) получим из дифференциальных уравнений (7.5) следующие алгебраические уравнения:

$$\begin{aligned}-m\omega^2 X_0 \sin(\omega t) &= -eE_0 \sin(\omega t) + \frac{e}{c} \omega Y_0 H_0 \sin(\omega t) \\ -m\omega^2 Y_0 \cos(\omega t) &= \frac{e}{c} \omega X_0 H_0 \cos(\omega t)\end{aligned}\tag{7.8}.$$

Проведя сокращения функций типа $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$ в левых и правых частях уравнений (7.8), получим следующие соотношения для амплитуд осцилляций электрона X_0 и Y_0 по осям OX и OY соответственно:

$$\begin{aligned}-m\omega^2 X_0 &= -eE_0 + \frac{e}{c} \omega Y_0 H_0 \\ -m\omega^2 Y_0 &= \frac{e}{c} \omega X_0 H_0\end{aligned}\tag{7.9}.$$

Введем следующее обозначение:

$$\Omega = \frac{eH_0}{mc}\tag{7.10}.$$

Параметр Ω имеет размерность частоты, и называется электронной циклотронной частотой (ЭЦЧ) или гиромагнитной электронной частотой. В нерелятивистском случае эта частота совпадает с частотой обращения свободного электрона вокруг вектора магнитного поля $\vec{H}_0$ в плоскости XY ,

перпендикулярной этому вектору и оси OZ . Для свободного электрона его циклотронная частота может быть определена также из отождествления силы Лоренца с центростремительной силой, удерживающей электрон на орбите вращения вокруг вектора магнитного поля H_0 :

$$\frac{mV^2}{R} = eVH_0; \quad \frac{V}{R} = \Omega = \frac{eH_0}{mc}; \quad R = \frac{mc}{eH_0} V = \frac{V}{\Omega}, \quad R - \text{ радиус орбиты}$$

электрона или радиус Лармора.

Заметим, что для релятивистского случая в выражение для ЭЦЧ будет входить релятивистский фактор $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$, и в этом случае формула для

$$\text{ЭЦЧ приобретет вид } \Omega = \frac{eH_0}{m\gamma c}.$$

Учитывая выражение (7.10) получим из системы уравнений (7.9) следующую систему для соотношений амплитуд X_0 и Y_0

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{eE_0}{m\omega^2} - \frac{\Omega}{\omega} Y_0 \\ -Y_0 &= \frac{\Omega}{\omega} X_0 \end{aligned} \quad (7.11).$$

Проведя в (7.11) подстановку Y_0 из второго уравнения в первое получим выражение для X_0 , и, соответственно, подставляя в явном виде выражение для X_0 во второе уравнение, окончательно получим следующие выражения для амплитуд:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{eE_0}{m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} = \frac{eE_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \\ Y_0 &= -\frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{eE_0}{m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} = -\frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{eE_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \end{aligned} \quad (7.12).$$

Формула амплитуды X_0 , определяющая движение электрона по оси OX , имеет вид, характерный для амплитуды осцилляции электрона в электрическом СВЧ поле $\frac{eE_0}{m\omega^2}$, в котором в знаменателе вместо квадрата частоты СВЧ поля ω^2 , стоит разность квадратов частоты электромагнитного поля и ЭЦЧ ($\omega^2 - \Omega^2$).

Рассмотрим траекторию движения электрона, находящегося одновременно в однородном осциллирующем электрическом поле и постоянном однородном магнитном поле при их взаимно ортогональной ориентации. Для этого, используя выражения (7.6) и (7.12), запишем в явном виде выражения для координат электрона:

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 \cdot \sin(\omega t) = \frac{eE_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \cdot \sin(\omega t) \\ y(t) &= Y_0 \cdot \cos(\omega t) = -\frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{eE_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (7.13).$$

Разделим левые и правые части выражений (7.13) на выражения амплитуд, стоящие перед $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$, и, далее, возводя в квадрат левые и правые части и суммируя их, получим выражение для траектории электрона в виде:

$$\left(\frac{x(t)}{X_0} \right)^2 + \left(\frac{y(t)}{Y_0} \right)^2 = \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1 \quad (7.14).$$

Из курса аналитической геометрии известно, что выражение (7.14) представляет собой плоскую фигуру типа эллипс, располагающийся в плоскости XY с центром в начале координат. При этом размер эллипса по оси OX составляет $2X_0$, а его размер оси OY составляет $2Y_0$ (X_0 и Y_0 размеры полуосей эллипса по осям OX и OY соответственно):

$$2|X_0| = \frac{2eE_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \quad (7.15).$$

$$2|Y_0| = \frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{2eE_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)}$$

Определим направление движения электрона относительно вектора постоянного магнитного поля $\vec{H}_0$. Для этого рассмотрим траекторию движения электрона в плоскости XY при изменении фазы поля ωt от 0 до 2π .

Результаты рассмотрения фаз движения электрона при одновременном действии осциллирующего электромагнитного СВЧ поля и постоянного однородного магнитного представлены на рис. 7.1.

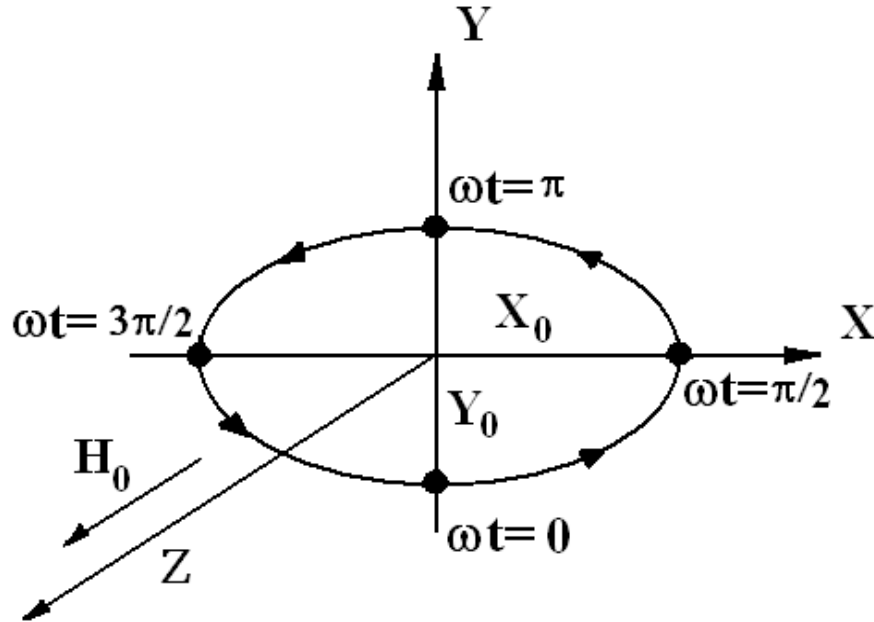


Рис. 7.1. Траектория движения электрона в плоскости XY при изменении фазы $\omega t = 0; \pi/2; \pi; 3\pi/2; 2\pi$ осциллирующего электрического поля E_{0x} в присутствии постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$. Здесь

$|X_0| = \frac{eE_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)}$, $|Y_0| = \frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{eE_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)}$ (построение осуществлено при допущении, что $Y_0 < X_0$, т.е. $\Omega < \omega$).

Если смотреть (рис. 7.1) вдоль оси OZ , то вращение электронов происходит по часовой стрелке вокруг вектора магнитного поля $\vec{H}_0$. Тогда переносимый электронами электрический ток будет иметь противоположное направление, по сравнению с движением электронов. Таким образом, движение электронов в магнитном поле генерирует такой электрический ток, который создает дополнительное магнитное поле, направленное против исходного магнитного поля $\vec{H}_0$. Это проявление эффекта диамагнетизма электронного газа в магнитном поле.

Рассчитаем теперь энергию электронов в этих же условиях. Для этого продифференцируем по времени выражения (7.13), и получим выражения для компонент скорости по осям OX и OY в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} x(t) = V_x(t) &= \frac{\omega e E_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \cdot \cos(\omega t) \\ \frac{\partial}{\partial t} y(t) = V_y(t) &= \frac{\Omega e E_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \cdot \sin(\omega t)\end{aligned}\quad (7.16).$$

Полная энергия электрона $\varepsilon(t)$ может быть рассчитана из выражения:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= m \frac{(\vec{V})^2}{2} = \frac{m}{2} [V_x^2(t) + V_y^2(t)] = \\ &= \frac{m}{2} \left[\frac{\omega e E_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \right]^2 \cos^2(\omega t) + \frac{m}{2} \left[\frac{\Omega e E_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \right]^2 \sin^2(\omega t) = (7.17). \\ &= \frac{m}{2} \left[\frac{e E_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \right]^2 \cdot [\omega^2 \cos^2(\omega t) + \Omega^2 \sin^2(\omega t)]\end{aligned}$$

Видно, что при $\omega > \Omega$ энергия во времени изменяется в интервале значений:

$$\frac{m}{2} \left[\frac{e \Omega E_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \right]^2 \leq \varepsilon(t) \leq \frac{m}{2} \left[\frac{e \omega E_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \right]^2 \quad (7.18).$$

Средняя энергия электрона может быть рассчитана путем усреднения выражения (7.17) по периоду электромагнитного поля. После усреднения по периоду поля значения $\cos^2(\omega t)$ и $\sin^2(\omega t)$ заменяем на 1/2, и получаем следующее выражение для средней энергии электрона:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{e^2 E_0^2 (\omega^2 + \Omega^2)}{4m [\omega^2 - \Omega^2]^2} = \frac{e^2 E_0^2 (\omega^2 + \Omega^2)}{4m (\omega - \Omega)^2 \cdot (\omega + \Omega)^2} \quad (7.19).$$

Проанализируем это выражение для средней энергии электронов, находящихся во взаимно ортогональных полях: однородном осциллирующем электрическом поле (коллинеарно оси OX) и постоянном однородном магнитном поле, ориентированном по оси OZ.

При малом значении магнитного поля, когда электронная циклотронная частота Ω существенно меньше частоты ω осцилляций СВЧ поля ($\Omega \ll \omega$), получаем выражение для средней энергии электрона в виде:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{e^2 E_0^2 (\omega^2 + \Omega^2)}{4m [\omega^2 - \Omega^2]^2} \approx \frac{e^2 E_0^2}{4m \omega^2} \quad (7.20).$$

Таким образом, при относительно малых постоянных магнитных полях ($\Omega \ll \omega$) средняя энергия осцилляции электрона в электромагнитном поле практически не отличается от средней энергии осцилляции в отсутствие внешнего постоянного магнитного поля.

При больших магнитных полях, когда ЭЦЧ Ω существенно больше частоты осцилляций ω электромагнитного поля ($\Omega \gg \omega$), выражение для средней энергии электрона может быть представлено в виде:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{e^2 E_0^2 (\omega^2 + \Omega^2)}{4m [\omega^2 - \Omega^2]^2} \approx \frac{e^2 E_0^2}{4m \Omega^2} \ll \frac{e^2 E_0^2}{4m \omega^2} \quad (7.21).$$

Таким образом, при больших постоянных магнитных полях ($\Omega \gg \omega$), средняя энергия осцилляции электрона, находящегося одновременно в

осциллирующем электромагнитном поле и сильном постоянном однородном магнитном поле имеет характерный для выражения энергии осцилляции вид, в котором квадрат частоты осцилляций ω заменен на квадрат ЭЦЧ. Поскольку ЭЦЧ Ω существенно превосходит частоту осцилляций ω электромагнитного поля, то значение средней энергии осцилляции в сильном магнитном поле мало по сравнению со средней энергией осцилляции в отсутствие магнитного поля.

Рассмотрим теперь случай, когда величина ЭЦЧ Ω и частота осцилляции электрического поля ω сближаются. Точное равенство частот $\Omega = \omega$ соответствует явлению электронного циклотронного резонанса (ЭЦР), однако это точное равенство выполнить сложно. Это обусловлено тем, что всегда имеется неоднородность магнитного поля, и, перемещаясь, электрон выходит из резонанса. Изменение импульса электрона при наборе им энергии в резонансе приводит к релятивистскому изменению ЭЦЧ электрона уже при энергиях выше 10 кэВ.

Поэтому рассмотрим случай не точного равенства частот, а их близость с небольшой разностью частот – расстройкой. Введем величину δ малой расстройки частот $|\Omega - \omega| = \delta \ll \omega$, тогда при $\Omega \approx \omega$ и $\omega^2 + \Omega^2 \approx 2\omega^2$ и $\Omega + \omega \approx 2\omega$ выражение для средней энергии электрона будет иметь вид:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{e^2 E_0^2 (\omega^2 + \Omega^2)}{4m [\omega^2 - \Omega^2]^2} \approx \frac{2\omega^2 e^2 E_0^2}{4m \delta^2 \cdot 4\omega^2} = \frac{e^2 E_0^2}{8m \delta^2} \quad (7.22).$$

Из формулы (7.22) видно, что при малых значениях разности частот $\delta \ll \omega$ средняя энергия электронов вблизи ЭЦР может быть довольно значительной, и существенно превышать среднюю осцилляторную энергию электронов в электромагнитном поле в отсутствие магнитного поля. Конечная величина энергии зависит от близости ЭЦЧ Ω к частоте осцилляций электромагнитного поля ω . Точный резонанс трудно

поддерживать даже в больших установках и с хорошей однородностью магнитного поля. Трудности в поддержании ЭЦР состоят в том, что при наличии даже небольших градиентов полей возможен выход электронов из резонанса в результате их движения в пространстве. Выход из резонанса может быть связан также с релятивистским «увеличением массы» электронов. В некоторых случаях для корректировки ухода частоты вращения электронов используется процедура увеличения магнитного поля во времени, и, тем самым, достигается более продолжительное сохранение условий для ЭЦР. При этом могут достигаться большие значения энергии электронов.

Рассмотрим теперь другую взаимную ориентацию электрической компоненты СВЧ волны $\vec{E}(x, y, z, t) = \{E_0; 0; 0\} \sin(\omega t - kz)$ и вектора постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$, который будет ориентирован по оси OY . Эта конфигурация полей интересна тем, что она реализуется в установках типа токамак или стелларатор. В стеллараторах и токамаках, как правило, применяется именно такая схема ввода СВЧ излучения в установки, при которой СВЧ нагрев осуществляется на «необыкновенной» моде вводимой СВЧ волны. Для этой моды характерна такая конфигурация полей, при которой электрическая компонента СВЧ поля ориентирована перпендикулярно вектору постоянного магнитного поля $\vec{H}_0$, при этом волновой вектор $\vec{k}$ также перпендикулярен вектору $\vec{H}_0$. В нашем случае это будет соответствовать ориентации электрической компоненты СВЧ поля коллинеарной оси OX , а вектор постоянного магнитного поля будет ориентирован по оси OY , т.е. коллинеарно магнитной компоненте СВЧ поля, величина которой в рассматриваемой конфигурации полагается существенно меньше величины постоянного магнитного поля.

Рассмотрим этот случай, используя подход, аналогичный подходу, изложенному в первой части лекции.

Поля СВЧ волны и постоянное однородное магнитное поле может быть представлены векторами:

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \{E_0; 0; 0\} \sin(\omega t - kz) \\ \vec{H}(x, y, z, t) &= \{0; H_y; 0\} \sin(\omega t - kz) \\ \vec{H}_0(x, y, z) &= \{0; H_0; 0\}\end{aligned}\quad (7.23).$$

В предположении, что магнитная компонента СВЧ волны существенно меньше величины внешнего постоянного магнитного поля, выражение для действующей на электрон силы Лоренца получим в виде:

$$\begin{aligned}-e\vec{E}(t) - \frac{e}{c}[\vec{V} \times \vec{H}] &= -\frac{e}{c} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ 0 & H_0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -e \left\{ E_0 \sin(\omega t - kz) - \frac{1}{c} \frac{\partial z}{\partial t} \cdot H_0; 0; \frac{1}{c} \frac{\partial x}{\partial t} \cdot H_0 \right\}\end{aligned}\quad (7.24).$$

Уравнения движения электрона по координатам с учетом (7.24) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -eE_0 \cdot \sin(\omega t - kz) + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \cdot H_0 \right) \\ m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 0 \\ m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{c} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \cdot H_0 \right)\end{aligned}\quad (7.25).$$

Поскольку действие сил по оси OY равно нулю, будем полагать что $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ и $y = 0$.

При рассмотрении уравнения движения электрона по оси OX видно, что первый член, обусловленный электрической компонентой СВЧ поля в

нерелятивистском случае должен доминировать над вторым членом, и движение по оси OX будет происходить подобно гармоническим осцилляциям с характерной круговой частотой СВЧ поля ω . Поскольку правая часть третьего уравнения (7.13) содержит величину $\frac{1}{c} \frac{\partial x}{\partial t} \ll 1$, то, не ограничивая общности рассмотрения, будем полагать $\frac{\partial z}{\partial t} \approx 0$; $\omega t \gg kz$, при этом значением величины kz в аргументе функции $\sin(\omega t - kz)$ можно пренебречь. Из правой части первого уравнения (7.25) видно, что первый член доминирует, тогда скорость $\frac{\partial x}{\partial t}$ электрона по оси OX будет иметь вид осцилляций с частотой ω : $\frac{\partial x}{\partial t} \approx \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t)$. Как видно из третьего уравнения (7.25), характер движения электрона по оси OZ также будет иметь вид осцилляций с той же частотой ω , но сдвинутых по фазе на $\pi/2$. Учитывая это, будем искать частные решения уравнений (7.25) для случая движения электрона с установившимися параметрами в следующем виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 \sin(\omega t) \\ z(t) &= Z_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (7.26).$$

где X_0 и Z_0 амплитуды осцилляций соответственно по осям OX и OZ .

Из общего вида решений (7.26) путем однократного и двукратного дифференцирования получим обобщенные выражения для скоростей и ускорений электрона в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} x(t) &= \omega X_0 \cos(\omega t) \\ \frac{\partial}{\partial t} z(t) &= -\omega Z_0 \sin(\omega t) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t) &= -\omega^2 X_0 \sin(\omega t) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} z(t) &= -\omega^2 Z_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (7.27).$$

Подставляя выражения (7.27) в систему уравнения (7.25), получим из дифференциальных уравнений следующие алгебраические уравнения:

$$\begin{aligned} -m\omega^2 X_0 \sin(\omega t) &= -eE_0 \sin(\omega t) + \frac{e}{c} \omega Z_0 H_0 \sin(\omega t) \\ -m\omega^2 Z_0 \cos(\omega t) &= -\frac{e}{c} \omega X_0 H_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (7.28).$$

Проведя сокращения в левой и правой частях (7.28), получим соотношения для амплитуд X_0 и Z_0 :

$$\begin{aligned} -m\omega^2 X_0 &= -eE_0 + \frac{e}{c} (\omega Z_0 H_0) \\ -m\omega^2 Z_0 &= -\frac{e}{c} (\omega X_0 H_0) \end{aligned} \quad (7.29).$$

Введя следующее обозначения:

$$\Omega = \frac{eH_0}{mc} \quad (7.30),$$

получим соотношения между амплитудами X_0 и Z_0 :

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{eE_0}{m\omega^2} - \frac{\Omega}{\omega} Z_0 \\ -Z_0 &= \frac{\Omega}{\omega} X_0 \end{aligned} \quad (7.31).$$

Окончательно получим следующие выражения для амплитуд X_0 и Z_0 :

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{eE_0}{m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} = \frac{eE_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \\ Z_0 &= -\frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{eE_0}{m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} = -\frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{eE_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \end{aligned} \quad (7.32).$$

Амплитуды X_0 и Z_0 , характеризующие движение электронов по осям OX и OZ , имеют вид, характерный для выражения амплитуды осцилляции

электрона $\frac{eE_0}{m\omega^2}$, в котором в знаменателе вместо квадрата частоты СВЧ поля ω^2 , стоит разность квадрата частоты СВЧ поля и квадрата ЭЦЧ ($\omega^2 - \Omega^2$).

Рассмотрим траекторию движения электрона, находящегося одновременно в однородном осциллирующем электрическом поле и однородном постоянном магнитном поле при их взаимно ортогональной ориентации. Для этого, используя выражения (7.26) и (7.32), запишем в явном виде выражения для координат:

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 \sin(\omega t) = \frac{eE_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \sin(\omega t) \\ z(t) &= Z_0 \cos(\omega t) = -\frac{\Omega}{\omega} \frac{eE_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (7.33).$$

Разделив левые и правые части выражений (7.33) на выражения амплитуды, стоящие перед $\sin(\omega t)$ и $\cos(\omega t)$, и, далее, возведя в квадрат левые и правые части и просуммировав их, получим выражение для траектории электрона в виде:

$$\left(\frac{x(t)}{X_0} \right)^2 + \left(\frac{z(t)}{Z_0} \right)^2 = \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1 \quad (7.34).$$

Из аналитической геометрии известно, что выражение (7.34) представляет собой эллипс, располагающийся в плоскости XZ с центром в начале координат (аналогично рис. 7.1). При этом полный размер эллипса по оси OX составляет величину $2X_0$, а его полный размер оси OZ составляет $2Z_0$:

$$\begin{aligned} 2|X_0| &= \frac{2eE_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \\ 2|Z_0| &= \frac{\Omega}{\omega} \frac{2eE_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \end{aligned} \quad (7.35).$$

Рассчитаем энергию электронов в этих же условиях. Для этого продифференцируем по времени выражения (7.33) и получим выражения компонент скорости по координатам в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} x(t) = V_x(t) &= \frac{\omega e E_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \cos(\omega t) \\ \frac{\partial}{\partial t} z(t) = V_z(t) &= \frac{\Omega e E_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \sin(\omega t)\end{aligned}\quad (7.36).$$

Полная энергия электрона $\varepsilon(t)$ может быть рассчитана из выражения:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \frac{m}{2} [V_x^2(t) + V_y^2(t)] = \\ &= \frac{m}{2} \left[\frac{\omega e E_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \right]^2 \cos^2(\omega t) + \left[\frac{\Omega e E_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \right]^2 \sin^2(\omega t) = \\ &= \frac{m}{2} \left[\frac{e E_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \right]^2 [\omega^2 \cos^2(\omega t) + \Omega^2 \sin^2(\omega t)]\end{aligned}\quad (7.37).$$

Видно, что при $\omega > \Omega$ энергия электрона во времени изменяется в интервале значений:

$$\frac{m}{2} \left[\frac{\Omega e E_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \right]^2 \leq \varepsilon(t) \leq \frac{m}{2} \left[\frac{\omega e E_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \right]^2 \quad (7.38).$$

Средняя энергия электрона может быть рассчитана путем усреднения выражения (7.37) по времени, тогда, при усреднении по периоду СВЧ поля $\cos^2(\omega t)$ и $\sin^2(\omega t)$ заменяем на 1/2, и получаем следующее выражение для средней энергии электрона:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{e^2 E_0^2 (\omega^2 + \Omega^2)}{4m[\omega^2 - \Omega^2]^2} = \frac{e^2 E_0^2 (\omega^2 + \Omega^2)}{4m(\omega - \Omega)^2 \cdot (\omega + \Omega)^2} \quad (7.39).$$

Проанализируем это выражение для электрона, находящегося одновременно в СВЧ поле и в постоянном однородном магнитном поле. При малом значении магнитного поля, когда электронная циклотронная частота

Ω существенно меньше частоты ω осцилляций СВЧ поля ($\Omega \ll \omega$), выражение для средней энергии электрона может быть представлено в виде:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{e^2 E_0^2 (\omega^2 + \Omega^2)}{4m [\omega^2 - \Omega^2]^2} \approx \frac{e^2 E_0^2}{4m \omega^2} \quad (7.40).$$

Таким образом, при малых значениях постоянного однородного магнитного поля H_0 , средняя энергия осцилляции электрона в СВЧ поле практически не отличается от средней энергии осцилляции в отсутствие магнитного поля.

При очень больших постоянных однородных магнитных полях, когда ЭЦЧ Ω существенно больше частоты осцилляций ω СВЧ поля ($\Omega \gg \omega$), выражение для средней энергии электрона может быть представлено в виде:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{e^2 E_0^2 (\omega^2 + \Omega^2)}{4m [\omega^2 - \Omega^2]^2} \approx \frac{e^2 E_0^2}{4m \Omega^2} \ll \frac{e^2 E_0^2}{4m \omega^2} \quad (7.41).$$

Таким образом, при очень большом постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}_0$, средняя энергия осцилляции электрона, находящегося одновременно в осциллирующем СВЧ поле и постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}_0$, имеет вид, характерный для выражения энергии осцилляции, в котором в знаменателе квадрат частоты осцилляций СВЧ поля заменен на квадрат ЭЦЧ. Поскольку, ЭЦЧ существенно превосходит частоту осцилляций СВЧ поля, то значение средней энергии осцилляции в сильном постоянном магнитном поле H_0 мало по сравнению со средней энергией осцилляции в отсутствие магнитного поля.

Рассмотрим теперь случай, когда величина ЭЦЧ Ω и круговая частота осцилляции СВЧ поля ω сближаются. Точное равенство частот $\Omega = \omega$ соответствует явлению электронного циклотронного резонанса (ЭЦР). Однако точного резонанса достичь весьма трудно, но можно приблизиться к нему на ограниченном отрезке времени. Обозначим величину разности

частот $|\Omega - \omega| = \delta$, и будем полагать, что электрон находится вблизи электронного циклотронного резонанса $\delta \ll \omega$. Тогда $\Omega \approx \omega$, $\omega^2 + \Omega^2 \approx 2\omega^2$, $\Omega + \omega \approx 2\omega$, $[\omega^2 - \Omega^2]^2 = (\omega - \Omega)^2(\omega + \Omega)^2 \approx \delta^2 4\omega^2$, и выражение для средней энергии электрона будет иметь вид:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{e^2 E_0^2 (\omega^2 + \Omega^2)}{4m [\omega^2 - \Omega^2]^2} \approx \frac{2\omega^2 e^2 E_0^2}{4m \delta^2 \cdot 4\omega^2} = \frac{e^2 E_0^2}{8m \delta^2} \quad (7.42).$$

Из формулы (7.42) видно, что при очень малых значениях расстройки $\delta \ll \omega$ средняя энергия электронов вблизи ЭЦР может быть довольно значительной, существенно превышающей осцилляторную энергию электрона в СВЧ поле в отсутствие магнитного поля $\vec{H}_0$. Максимальная величина энергии электрона зависит от близости ЭЦР Ω к частоте осцилляции ω .

Рассмотренные нами взаимодействия СВЧ поля с электронами в условиях взаимно ортогональной ориентации электрической компоненты СВЧ поля и постоянного магнитного поля $\vec{H}_0$ реализуются во многих экспериментальных ситуациях. Эти условия встречаются как в учебно-исследовательских лабораторных стендах, так и в крупных исследовательских комплексах (токамаки, стеллараторы, открытые магнитные ловушки). В токамаках и стеллараторах изучается нагрев плазмы в условиях близких к электронному циклотронному резонансу (ЭЦР). Точный резонанс бывает очень трудно поддерживать даже в больших установках вследствие неоднородности поля $\vec{H}_0$ и проявления релятивизма, приводящего к изменению «массы» электрона и значения электронной циклотронной частоты. В условиях вблизи ЭЦР также работают открытые осесимметричные магнитные ловушки плазмы Института ядерной физики СО РАН, это, например, открытая ловушка с гофрированным магнитным

полем (ГОЛ-3) и газодинамическая магнитная ловушка (ГДЛ). Работают современные технологические установки типа пробкотрона, в которых создаваемая и нагреваемая СВЧ излучением плазма в режиме ЭЦР применяется для обработки материалов, включая большие полупроводниковые пластины. В Институте прикладной физики РАН на основе ЭЦР созданы источники высокоионизованных ионов аргона, криптона и ксенона, применяющиеся в качестве инжекторов в ускорителях многозарядных ионов.

Явление ЭЦР используется также в специальных установках для создания потока рентгеновского излучения в диапазоне энергий квантов от 1 кэВ до 1 МэВ. Преимущество таких рентгеновских устройств состоит в том, что для получения рентгеновского излучения применяются неопасные источники высокого напряжения (4-6 кВ), и используются малогабаритные высокоэффективные источники СВЧ излучения (магнетроны), устанавливаемые в бытовых микроволновых печах. Такие недорогие установки разработаны в Институте общей физики им. А.М. Прохорова РАН для применения в биологических и медицинских исследованиях как источники малых и средних доз ионизирующего излучения. Такие источники используются для изучения воздействия рентгеновского излучения низкой интенсивности на биологические объекты с целью возбуждения мутаций в ДНК. Эти новые источники рентгеновского излучения могут применяться и для воздействия на раковые опухоли. Такого рода установки могут быть использованы также для обеззараживания медицинских материалов и инструментов, а также применяться в качестве стерилизаторов продуктов питания.

Задача 7.1.

Рассчитать интервал значений величины постоянного однородного магнитного поля, при которой средняя осцилляторная энергия электронов в поле СВЧ волны длиной волны 12.24 см с интенсивностями 100 кВт/см² и 1

кВт/см² составит более 100 кэВ. Вектор магнитной индукции и электрической компоненты СВЧ волны взаимно ортогональны.

Решение

Определим сначала интервал значений магнитной индукции для интенсивностей СВЧ волны 100 кВт/см² и 1 кВт/см². Средняя энергия электрона в постоянном однородном магнитном поле определяется выражением (7.39):

$$\varepsilon_{cp}(H) = \frac{e^2 E_0^2 (\omega^2 + \Omega^2)}{4m \left[\omega^2 - \Omega^2 \right]^2} = \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} \cdot \frac{\omega^2 (\omega^2 + \Omega^2)}{\left[\omega^2 - \Omega^2 \right]^2}.$$

Видно, что выражение ε_{cp} можно представить в виде двух множителей, один из которых представляет собой среднюю осцилляторную энергию в отсутствие магнитного поля $\varepsilon_{cp}(H_0=0)$, а другой множитель определяется соотношением частоты СВЧ поля ω и электронной циклотронной частоты Ω . Поэтому удобно сначала вычислить круговую частоту и среднюю осцилляторную энергию электрона для интенсивности СВЧ излучения 100 кВт/см² в отсутствие магнитного поля. Учитывая, что имеют место соотношения:

$$I = \frac{E_0^2}{8\pi} c, \quad E_0^2 = \frac{8\pi I}{c};$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{12.24} \approx 1.54 \cdot 10^{10} \text{ рад/с},$$

получаем выражение для средней осцилляторной энергии в отсутствие магнитного поля:

$$\varepsilon_{cp}(H_0=0) = \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2} = \frac{e^2 8\pi I}{4m\omega^2 c} \approx \frac{23 \cdot 10^{-20} \cdot 8 \cdot 3.14 \cdot 10^5 \cdot 10^7}{4 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 2.37 \cdot 10^{20} \cdot 3 \cdot 10^{10}} \approx$$

$$\approx 2.23 \cdot 10^{-10} \text{ эрг} \approx 139 \text{ эВ}.$$

Сравнение полученного значения $\varepsilon_{cp}(H_0=0)$ с требуемой энергией 10⁵ эВ показывает, что величина индукции магнитного поля должна быть

близкой к значению, соответствующему электронному циклотронному резонансу. Тогда можно воспользоваться упрощенной формулой (7.42) для вычисления средней энергии электронов вблизи резонанса $\Omega \approx \omega$, $|\Omega - \omega| = \delta \ll \omega$:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{e^2 E_0^2 (\omega^2 + \Omega^2)}{4m [\omega^2 - \Omega^2]^2} \approx \frac{2\omega^2 e^2 E_0^2}{4m \delta^2 \cdot 4\omega^2} = \frac{e^2 E_0^2}{4m \omega^2} \frac{\omega^2}{2\delta^2} \geq 10^5 \text{ эВ}$$

Подставляя в полученное выражение значение средней энергии осцилляции в отсутствии магнитного поля можно найти необходимое соотношение между δ и ω :

$$\frac{\omega^2}{2\delta^2} \geq \frac{10^5 \text{ эВ}}{139 \text{ эВ}} \approx 719.4 \text{ или } \frac{\omega}{\delta} \approx 37.93$$

$$\text{и } \delta = |\omega - \Omega| \approx 0.0264 \cdot \omega$$

Из полученного выражения получаем два значения для электронной циклотронной частоты и, соответственно, два значения индукции магнитного поля H_1 и H_2 , между которыми должно лежать значение магнитной индукции, которое будет удовлетворять условиям задачи:

$$\delta = |\omega - \Omega| \approx 0.0264 \cdot \omega$$

$$\Omega_1 = \frac{eH_1}{mc} \approx \omega - 0.0264 \cdot \omega \approx 0.9736\omega \approx 1.49 \cdot 10^{10}$$

$$\Omega_2 = \frac{eH_2}{mc} \approx \omega + 0.0264 \cdot \omega \approx 1.0264\omega \approx 1.58 \cdot 10^{10}$$

$$H_1 \approx \frac{1.49 \cdot 10^{10} \cdot mc}{e} \approx \frac{1.49 \cdot 10^{10} \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4.8 \cdot 10^{-10}} \approx 847 \text{ Э}$$

$$H_2 \approx \frac{1.58 \cdot 10^{10} \cdot mc}{e} \approx \frac{1.58 \cdot 10^{10} \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4.8 \cdot 10^{-10}} \approx 899 \text{ Э}$$

Таким образом, для получения энергии электронов более 10^5 эВ при интенсивности 100 кВт/см^2 необходимо, чтобы в области существования однородного СВЧ поля значение индукции магнитного поля находилось в интервале: $847 \text{ Э} \leq H \leq 899 \text{ Э}$.

Далее для расчета интервала значений магнитного поля для интенсивности СВЧ излучения 1 кВт/см² необходимо определить среднюю энергию осцилляции электрона для этой интенсивности, величина которой будет в 100 раз меньше осцилляторной энергии при 100 кВт/см², т.е. составит всего 1.4 эВ. Тогда вычисления параметров $\frac{\omega^2}{2\delta^2}$ и $\frac{\omega}{\delta}$, определяющих близость к электронному циклотронному резонансу, дают следующие результаты:

$$\frac{\omega^2}{2\delta^2} \geq \frac{10^5 \text{ эВ}}{1.39 \text{ эВ}} \approx 71942.44; \quad \delta = \frac{\omega}{379.32} = |\omega - \Omega| \approx 0.002636 \cdot \omega$$

Из этих соотношений вычисляем крайние значения интервала ЭЦЧ Ω_1 и Ω_2 , а затем соответствующие величины магнитных полей H_1 и H_2 :

$$\Omega_1 = \frac{eH_1}{mc} \approx \omega - 0.002632\omega \approx 0.997368\omega \approx 1.5359 \cdot 10^{10}$$

$$\Omega_2 = \frac{eH_2}{mc} \approx \omega + 0.002632\omega \approx 1.002632\omega \approx 1.5440 \cdot 10^{10}$$

$$H_1 \approx \frac{1.5359 \cdot 10^{10} \cdot mc}{e} \approx \frac{1.5359 \cdot 10^{10} \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4.8 \cdot 10^{-10}} \approx 874 \text{ Э}$$

$$H_2 \approx \frac{1.5440 \cdot 10^{10} \cdot mc}{e} \approx \frac{1.5440 \cdot 10^{10} \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4.8 \cdot 10^{-10}} \approx 878 \text{ Э}$$

Таким образом, из полученных результатов видно, что электроны в магнитном поле могут набирать большую энергию даже при относительно небольшой интенсивности СВЧ излучения, но для этого необходимо удерживать постоянное однородное магнитное поле в более узком интервале значений. Таким образом, чем больше разница между значением осцилляторной энергии электрона в СВЧ поле в отсутствии магнитного поля и необходимой пороговой величиной энергии электрона в магнитном поле, тем уже интервал значений магнитного поля требуется поддерживать для реализации этой цели.

**Лекция 8. Движение электронов в неоднородном поле $\vec{E}(x,t)$ СВЧ волны
и в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}_0$ в конфигурации**

$$\nabla \vec{E}^2(x,t) \updownarrow \vec{E}(x,t) \updownarrow \vec{e}_x \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_y$$

Рассмотрим важный вопрос движения заряженных частиц в неоднородном СВЧ поле в присутствие постоянного однородного магнитного поля. Как известно из лекций 5 и 6, в неоднородном СВЧ поле в отсутствии магнитного поля возникает СВЧ квазипотенциал. В данной лекции будет показано, что и в постоянном однородном магнитном поле СВЧ квазипотенциал возникает и может сильно трансформировать характер движения заряженных частиц в такой конфигурации полей.

Рассмотрим СВЧ волну с неоднородностью электрической компоненты $\vec{E}(x)$ по оси OX . При этом будем исследовать такой случай, когда градиент неоднородности квадрата электрического поля СВЧ излучения $\nabla \vec{E}^2(x,t)$ и вектор электрического поля коллинеарны оси OX : $\nabla \vec{E}^2(x,t) \updownarrow \vec{E}(x)$:

$$\vec{E}(x,t) = \{E_x(x); 0; 0\} \cdot \sin(\omega t - kz) \quad (8.1),$$

где координата z , стоящая в аргументе синуса, связана с фазой СВЧ волны, распространяющейся со скоростью света c по оси OZ с круговой частотой ω и волновым числом k . При этом для этой волны имеют место следующие соотношения:

$$\omega t - kz = const, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = c = \frac{\omega}{k}, \quad \frac{kc}{\omega} = 1 \quad (8.2).$$

Будем рассматривать такие случаи неоднородности СВЧ поля, когда амплитуда пространственных осцилляций электрона $X_0 = \frac{eE_x}{m\omega^2}$ в этом поле значительно меньше характерного масштаба неоднородности СВЧ поля L_x :

$$L_x = \frac{E_x(x)}{\frac{\partial E_x(x)}{\partial x}} \gg X_0 = \frac{eE_x}{m\omega^2} \geq x(t) = \frac{eE_x}{m\omega^2} \sin \omega t \quad (8.3).$$

По аналогии с лекцией 5 будем рассматривать движение электрона в виде двух типов движений – быстрого движения, обусловленного движением в осциллирующем СВЧ поле с характерным временным масштабом периода поля $T=2\pi/\omega$, и медленным движением, связанным с неоднородностью поля. Медленное движение происходит во времена t , существенно превышающие период СВЧ поля T : $t \gg T$. Рассматриваем только нерелятивистские скорости движения заряженных частиц.

В присутствии СВЧ волны и постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$ на электрон с зарядом $-e$ и массой m , движущийся со скоростью $\vec{V}$, действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} \left[\vec{V} \times \vec{H}_0 \right] \quad (8.4).$$

Постоянное однородное магнитное поле $\vec{H}_0$ в предполагаемой конфигурации представим в следующем векторном виде:

$$\vec{H}_0 = \{0; H_{0y}; 0\} \quad (8.5).$$

При наличии неоднородности электрической компоненты СВЧ поля по оси OX из уравнения Максвелла определим осциллирующие магнитные компоненты поля:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (8.6),$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x, & \vec{e}_y, & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(x)\sin(\omega t - kz), & 0, & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ 0; \frac{\partial}{\partial z} [E_x(x)\sin(\omega t - kz)]; 0 \right\} = \left\{ 0; -kE_x(x)\cos(\omega t - kz); 0 \right\} \end{aligned} \quad (8.7).$$

Учитывая (8.7), из (8.6) получим выражения для осциллирующей части магнитной компоненты $H_{\omega y}(x, t)$ СВЧ поля в виде:

$$\begin{aligned} -kE_x(x)\cos(\omega t - kz) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{\omega y}}{\partial t} \\ H_{\omega y}(x, t) &= \frac{kc}{\omega} E_x(x)\sin(\omega t - kz) = E_x(x)\sin(\omega t - kz) \end{aligned} \quad (8.8).$$

Из (8.8) видно, что осциллирующая магнитная компонента $\vec{H}_{\omega y}$ СВЧ поля коллинеарна оси OY , т.е. в выбранных нами условиях вдоль той же оси направлен и вектор постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$. В гауссовой системе величина амплитуды осциллирующего магнитного поля волны $\vec{H}_{\omega y}$ равна по абсолютной величине амплитуде осциллирующего электрического поля СВЧ излучения. Магнитная и электрическая компоненты СВЧ поля осциллируют синхронно в фазе. При этом другие осциллирующие магнитные компоненты не возникают.

Поскольку в наших условиях имеется два типа магнитных полей – осциллирующая магнитная компонента амплитудой $H_{\omega y}$ СВЧ поля и постоянное однородное магнитное поле величиной H_{0y} , то выражение для векторного произведения скорости электрона и суммарного магнитного поля, входящего в силу Лоренца, представляется в виде:

$$\begin{aligned}
-\frac{e}{c}[\vec{V} \times \vec{H}] &= -\frac{e}{c} \begin{vmatrix} \vec{e}_x, & \vec{e}_y, & \vec{e}_z \\ \frac{\partial x}{\partial t}, & \frac{\partial y}{\partial t}, & \frac{\partial z}{\partial t} \\ 0, & H_{0y} + H_{\omega y}, & 0 \end{vmatrix} = \\
&= -\frac{e}{c} \left\{ -\frac{\partial z}{\partial t} [H_{0y} + H_{\omega y}]; \quad 0; \quad \frac{\partial x}{\partial t} [H_{0y} + H_{\omega y}] \right\}
\end{aligned} \tag{8.9}.$$

Координаты x, y, z связаны с положением электрона, движущегося в СВЧ поле и в постоянном однородном магнитном поле. Тогда уравнения движения электрона по координатам x, y, z будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{e}{m} E_x(x) \sin(\omega t - kz) + \frac{e}{mc} \frac{\partial z}{\partial t} H_{0y} + \frac{e}{mc} \frac{\partial z}{\partial t} H_{\omega y} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{mc} \frac{\partial x}{\partial t} H_{0y} - \frac{e}{mc} \frac{\partial x}{\partial t} H_{\omega y}
\end{aligned} \tag{8.10}.$$

Далее в уравнениях (8.10) функцию вида $\sin(\omega t - kz)$ заменим на осциллирующую функцию вида $\sin(\omega t)$. Это можно сделать потому, что в уравнениях движения в качестве z используются координата электрона, а не координата постоянной фазы, движущейся со скоростью света электромагнитной волны. Для установления справедливости этой операции, оценим величину kz , имея в виду, что амплитуда осцилляторных смещений электрона (Z_0) по оси OZ не больше, чем величина максимального смещения электрона по оси OX , т.е. не больше амплитуды осцилляции

$X_0 = \frac{eE_x(x)}{m\omega^2}$, тогда справедливы следующие соотношения:

$$kz \equiv \frac{2\pi z}{\lambda} < \frac{2\pi Z_0}{\lambda} < \frac{2\pi X_0}{\lambda} < \frac{2\pi}{cT} \cdot \frac{eE_x(x)}{m\omega^2} = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{eE_x(x)}{m\omega^2} = \frac{eE_x(x)}{m\omega c} \ll 1 \tag{8.11}.$$

Из соотношения (8.11) ясно, что для электрона величина kz представляет собой отношение осцилляторной скорости электрона к

скорости света, а так как мы рассматриваем только нерелятивистские случаи движения электрона, то величина kz оказывается много меньше 1. Таким образом, в нашем случае для осциллирующего электрона величина kz является чрезвычайно малой величиной, которой мы можем пренебречь по сравнению с величиной ωt , в которой время t составляет много периодов СВЧ поля, т.е. $\omega t \gg 1$. Следовательно, в уравнениях движения электрона (8.10) в аргументе функции $\sin(\omega t - kz)$ величину kz можно опустить.

В дальнейшем будем иметь в виду такие случаи, когда величина постоянного магнитного поля H_{0y} будет больше величины осциллирующей магнитной компоненты $H_{\omega y}$ СВЧ поля. В противоположном случае, влияние постоянного магнитного поля на движение электрона будет пренебрежимо мало (см. лекцию 2). Таким образом, в уравнении движения электрона по оси Ox будем пренебрегать величиной осциллирующей магнитной компоненты по сравнению с величиной постоянного однородного магнитного поля $H_{0y} \gg H_{\omega y}$.

Далее задача состоит в том, чтобы, решая совместно первое и третье уравнения (8.10), найти усредненное по многим периодам поля уравнение, описывающее медленное движение электрона, обусловленное градиентом СВЧ поля, в сравнении с его быстрым осциллирующим движением по оси Ox .

Сначала мы упростим систему уравнений (8.10), опустив компоненты, связанные с осциллирующей магнитной компонентой $H_{\omega y}$, при этом оставим только наиболее значимые по величине члены в правых частях системы уравнений. Получив первые приближенные решения упрощенных уравнений, учтем следующие малые члены в правых частях системы уравнений (8.10).

Рассмотрим сначала первое уравнение движения электрона по оси Ox . Первый старший член в уравнении движения, определяемый электрической

компонентой СВЧ поля, является доминирующим. Второй член уравнения может быть как много меньше первого (в его состав входит множитель $\frac{1}{c} \frac{\partial z}{\partial t} \ll 1$), так и сравнимым с первым членом за счет довольно большой величины постоянного магнитного поля H_{oy} . Поэтому второй член не может быть отброшен. Совершенно ясно, что третий член, связанный с величиной осциллирующей магнитной компоненты СВЧ поля $H_{\omega y}$, в нерелятивистском приближении всегда является малым по сравнению с первым и вторым. Тогда, рассматривая движение по оси OX только с учетом первого и второго членов, получим приближенное уравнение движения электрона по оси OX в виде:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{eE_x(x)}{m} \cdot \sin(\omega t) + \Omega \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \quad (8.12).$$

Здесь, как и в лекции 7, введено обозначение величины $\frac{eH_{oy}}{mc} = \Omega$, – это электронная циклотронная частота. Проинтегрировав по времени (8.12), получим приближенное выражение для скорости электрона по оси OX :

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = \frac{eE_x(x)}{m\omega} \cos(\omega t) + \Omega \cdot z \quad (8.13).$$

Подставляя (8.13) в уравнение движения электрона по оси OZ (8.10) и заменяя $H_{\omega y} \sin(\omega t)$ на равную величину $E_x(x) \sin(\omega t)$, из (8.8), получим это уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = & -\frac{\Omega}{\omega} \frac{eE_x(x)}{m} \cos(\omega t) - \Omega^2 z - \\ & - \frac{1}{c} \frac{eE_x(x)}{m\omega} \cos(\omega t) \cdot \frac{eE_x(x)}{m} \sin(\omega t) - \frac{1}{c} \cdot \Omega \omega z \frac{eE_x(x)}{m\omega} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (8.14).$$

Из уравнения (8.14) видно, что третий член в правой части релятивистки мал по сравнению с первым членом, также как и четвертый член релятивистки мал по сравнению со вторым. Отбрасывая эти малые

члены, получим упрощенное уравнение движения электрона по оси OZ в виде:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{eE_x(x)}{m} \cos(\omega t) - \Omega^2 z \quad (8.15).$$

Переносим второй член правой части (8.15) в левую часть уравнения, получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \Omega^2 z = -\frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{eE_x(x)}{m} \cos(\omega t) \quad (8.16).$$

Уравнение (8.16) представляет собой классическое неоднородное уравнение осциллятора с вынуждающей гармонической силой в правой части уравнения. Из теории колебаний хорошо известно, что общее решение неоднородного уравнения осциллятора (8.16) состоит из суммы частного решения этого уравнения (гармонические осцилляции с частотой вынуждающей силы ω) и общего решения однородного уравнения, представляющего собой гармонические осцилляции с собственной частотой осциллятора Ω . При наличии даже слабого затухания решение, описывающее собственные колебания с частотой Ω , затухнет. Тогда останется только частное решение неоднородного уравнения, т.е. решение, обусловленное действием вынуждающей силы, осциллирующей с частотой ω . Тогда будем искать установившееся решение уравнения (8.16) в форме вынужденных колебаний в следующем виде:

$$z(t) = Z_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (8.17).$$

Подставляя (8.17) в (8.16), получаем алгебраическое уравнение для нахождения амплитуды Z_0 :

$$-\omega^2 Z_0 \cos(\omega t) + \Omega^2 Z_0 \cos(\omega t) = -\frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{eE_x(x)}{m} \cos(\omega t) \quad (8.18).$$

Из (8.18) находим выражение для амплитуды осцилляций Z_0 и выражение для зависимости координаты электрона на оси OZ от времени $z(t)$:

$$Z_0 = -\frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{eE_x(x)}{m(\Omega^2 - \omega^2)} = \frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{eE_x(x)}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \quad (8.19).$$

$$z(t) = \frac{\Omega}{\omega} \cdot \frac{eE_x(x)}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \cos(\omega t)$$

Выполнив дифференцирование по времени величины $z(t)$, получим выражение для скорости электрона по оси OZ :

$$\frac{\partial z(t)}{\partial t} = -\Omega \cdot \frac{eE_x(x)}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \sin(\omega t) \quad (8.20).$$

Подставляем (8.20) в исходное уравнение движение электрона по оси OX (8.12) и получаем следующее приближенное уравнение движения электрона по оси OX :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{eE_x(x)}{m} \sin(\omega t) - \Omega^2 \frac{eE_x(x)}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \sin(\omega t) \quad (8.21).$$

Для упрощения задачи, раскладываем величину электрическую компоненту $E_x(x)$ в ряд Тейлора вблизи произвольной точки x_0 при малом смещении $x(t)$:

$$E(x_0 + x(t)) \approx$$

$$\approx E(x_0) \left[1 + x(t) \cdot \frac{\partial E(x_0)}{\partial x E(x_0)} + \frac{x^2(t)}{2!} \frac{\partial^2 E(x_0)}{\partial x^2 E(x_0)} + \dots + \frac{x^{n-1}(t)}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} E(x_0)}{\partial x^{n-1} E(x_0)} + \dots \right] \quad (8.22).$$

Берем из (8.22) первые два члена разложения СВЧ поля: второй член мал по сравнению с первым, т.к. содержит малый параметр $x(t)/L_x$, а третий член мал по сравнению со вторым т.к. содержит малый параметр $[x(t)/L_x]^2$. Далее подставляем первые два члена разложения только в

первый член правой части уравнения (8.21). При этом второй член в правой части уравнения (8.21) уже является релятивистки малым по сравнению с первым членом, и сопоставим со вторым членом разложения (8.22), т.к. содержит отношение осцилляторной скорости электрона к скорости света

$\frac{eE_x(x)}{m\omega c} \ll 1$, что можно показать так:

$$\Omega^2 \frac{eE_x(x)}{m(\omega^2 - \Omega^2)} = \frac{eH_0}{mc} \frac{eE_x(x)}{m\omega} \frac{\omega\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)} = \frac{eE_x(x)eH_0}{m\omega c} \frac{\omega\Omega}{m(\omega^2 - \Omega^2)}$$

Далее, заменяя точку X_0 вблизи области разложения на произвольную точку X , получим следующее приближенное уравнение движение электрона по оси OX :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = & -\frac{eE_x(x)}{m} \cdot \sin(\omega t) - e \frac{x(t)}{m} \cdot \frac{\partial E_x(x)}{\partial x} \cdot \sin(\omega t) - \\ & - \Omega^2 \cdot \frac{eE_x(x)}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (8.23).$$

Движение электрона по оси OX можно разделить на быстрое осциллирующее движение $x_\omega(t)$ и медленного движения $x_g(t)$, связанное с градиентом СВЧ поля $\frac{\partial E_x(x)}{\partial x}$. Быстрому движению электрона соответствует первый и третий члены правой части уравнения (8.23), которые пропорциональны электрической компоненте СВЧ поля $E_x(x) \cdot \sin(\omega t)$. Медленному движению отвечает второй член правой части этого уравнения, пропорциональный пространственной производной электрической компоненты $\frac{\partial E_x(x)}{\partial x}$. Тогда быстрое движения описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial^2 x_\omega}{\partial t^2} = -\frac{eE_x(x)}{m} \sin(\omega t) - \Omega^2 \frac{eE_x(x)}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \sin(\omega t) \quad (8.24).$$

Медленное движение электрона будет описываться уравнением вида:

$$\frac{\partial^2 x_g}{\partial t^2} = -e \frac{x_\omega}{m} \frac{\partial E_x(x)}{\partial x} \sin(\omega t) \quad (8.25).$$

Уравнение (8.24) интегрируем дважды по времени и находим выражение для быстрого движения $x_\omega(t)$:

$$x_\omega(t) = \frac{eE_x(x)}{m\omega^2} \sin(\omega t) \frac{\omega^2 - \Omega^2 + \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)} = \frac{eE_x(x)}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \sin(\omega t) \quad (8.26).$$

Подставляем (8.26) в уравнение для медленного движения (8.25), и получаем следующее приближенное уравнение, описывающее медленное движение электрона по координате OX в неоднородном СВЧ поле $\vec{E}_x(x)$ в присутствии постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$, ориентированного перпендикулярно как электрической компоненте СВЧ поля, так и градиенту электрической компоненты СВЧ излучения:

$$\frac{\partial^2 x_g}{\partial t^2} = -\frac{e^2 E_x(x)}{m^2(\omega^2 - \Omega^2)} \cdot \frac{\partial E_x(x)}{\partial x} \sin^2(\omega t) \quad (8.27).$$

Усредняя правую часть уравнения (8.27) по периоду СВЧ поля, получаем $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$, и, вводя выражение для электрической компоненты СВЧ поля под знак пространственной производной, получим окончательно усредненное уравнение для медленного движения электрона по оси OX в неоднородном СВЧ поле и в постоянном однородном магнитном поле, коллинеарном магнитной компоненте СВЧ поля:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 x_g}{\partial t^2} &= -\frac{e^2 E_x(x)}{2m(\omega^2 - \Omega^2)} \frac{\partial E_x(x)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e^2 E_x^2(x)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} \right] \\ m \frac{\partial^2 x_g}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\omega^2} \right] \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\omega^2} \right] \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \end{aligned} \quad (8.28).$$

Уравнение (8.28) для медленного движения электрона в неоднородном СВЧ поле в присутствии однородного магнитного поля схоже по структуре с уравнением движения в неоднородном поле СВЧ квазипотенциала в

отсутствии магнитного поля, но отличается множителем $\frac{\omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)} = \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})}$

, который связан со спецификой движения электрона в магнитном поле. При этом необходимо отметить важное обстоятельство, характеризующее движение электрона по оси OX , – медленное движение коллинеарно осциллирующему электрическому полю и градиенту квадрата поля и ортогонально постоянному однородному магнитному полю.

Введем следующее обозначение СВЧ квазипотенциала в магнитном поле $\Phi_{\omega H}$:

$$\Phi_{\omega H} = \frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \equiv \frac{e^2 E_x^2(x)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} \quad (8.29).$$

При малых постоянных и однородных магнитных полях, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \ll 1$, СВЧ квазипотенциал $\Phi_{\omega H}$ практически совпадает с СВЧ квазипотенциалом в отсутствии магнитного поля:

$$\Phi_{\omega H} = \frac{e^2 E_x^2}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx \frac{e^2 E_x^2}{4m\omega^2} = \Phi_{\omega} \quad (8.30).$$

При больших значениях магнитного поля, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} > 1$ СВЧ квазипотенциала меняет знак и становится «отрицательным»:

$$\Phi_{\omega H} = \frac{e^2 E_x^2}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} = -\frac{e^2 E_x^2}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1)} \quad (8.31).$$

При очень сильных магнитных полях, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \gg 1$ величина СВЧ квазипотенциала отрицательна, и значительно меньше по величине СВЧ квазипотенциала в отсутствии магнитного поля.

$$\Phi_{\omega H} = -\frac{e^2 E_x^2}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1)} \approx -\frac{e^2 E_x^2}{4m\Omega^2} \quad (8.32).$$

$$\left| -\frac{e^2 E_x^2}{4m\Omega^2} \right| \ll \frac{e^2 E_x^2}{4m\omega^2}$$

Рассмотрим СВЧ квазипотенциал вблизи электронного циклотронного резонанса, т.е. когда $\Omega \approx \omega$. Сначала рассмотрим подход к резонансу со стороны больших частот СВЧ излучения, т.е. когда выполняются соотношения:

$$\omega - \Omega = \delta > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{\omega} \approx \frac{\delta}{\Omega} \ll 1 \quad (8.33).$$

Для этого случая рассчитаем величину резонансного множителя СВЧ квазипотенциала:

$$1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{(\omega - \Omega)(\omega + \Omega)}{\omega^2} \approx \frac{2\delta\omega}{\omega^2} = \frac{2\delta}{\omega} \approx \frac{2\delta}{\Omega} \ll 1 \quad (8.34).$$

Подставляем (8.34) в выражение для СВЧ квазипотенциала (8.29), получаем значение $\Phi_{\omega H}$ для случая приближения частоты СВЧ поля к резонансной электронной циклотронной частоте со стороны больших СВЧ частот $\omega \rightarrow \Omega$ при $\omega > \Omega$:

$$\Phi_{\omega H}(x) = \frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx \frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\omega^2 \cdot \frac{2\delta}{\omega}} = \frac{e^2 E_x^2(x)}{8m\omega\delta} \gg \frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\omega^2} \quad (8.35).$$

Из (8.35) видно, что знак СВЧ квазипотенциала положительный, и соответствует знаку СВЧ квазипотенциала в отсутствии магнитного поля. В то же время его величина может значительно превосходить величину СВЧ квазипотенциала в отсутствии магнитного поля.

Теперь рассмотрим подход к резонансу со стороны малых частот СВЧ излучения $\omega \rightarrow \Omega$ при $\Omega > \omega$, т.е. когда выполняются соотношения:

$$\omega - \Omega = -\delta < 0 \quad \text{и} \quad \left| \frac{\delta}{\omega} \right| \approx \left| \frac{\delta}{\Omega} \right| \ll 1 \quad (8.36).$$

Для этого случая величина резонансного множителя СВЧ квазипотенциала поменяет знак:

$$1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{(\omega - \Omega)(\omega + \Omega)}{\omega^2} \approx -\frac{2\delta\omega}{\omega^2} = -\frac{2\delta}{\omega} \approx -\frac{2\delta}{\Omega} < 0$$

$$\left| -\frac{2\delta}{\Omega} \right| \ll 1 \quad (8.37).$$

Подставляем (8.37) в выражение для СВЧ квазипотенциала (8.29), и получаем значение СВЧ квазипотенциала $\Phi_{\omega H}$ для случая приближения частоты СВЧ поля к резонансной электронной циклотронной частоте $\omega \rightarrow \Omega$ со стороны малых СВЧ частот $\omega < \Omega$:

$$\Phi_{\omega H} = \frac{e^2 E_x^2(X)}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx -\frac{e^2 E_x^2(X)}{4m\omega^2 \frac{2\omega\delta}{\omega^2}} = -\frac{e^2 E_x^2(X)}{8m\omega\delta}$$

$$\left| -\frac{e^2 E_x^2(X)}{8m\omega\delta} \right| \gg \frac{e^2 E_x^2(X)}{4m\omega^2} \quad (8.38).$$

Из (8.38) видно, что для близкого к резонансу случая $\omega \approx \Omega$ (при $\omega < \Omega$) абсолютная величина СВЧ квазипотенциала может значительно превосходить значение СВЧ квазипотенциала в отсутствии магнитного поля, а его знак отрицателен.

Таким образом, при переходе через резонанс $\frac{\Omega^2}{\omega^2} = 1$ от малых магнитных полей, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} < 1$, к большим магнитным полям, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} > 1$, СВЧ квазипотенциал меняет знак и становится отрицательным. В случае, близости к резонансу $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \approx 1$, абсолютная величина СВЧ квазипотенциала может значительно превосходить величину СВЧ квазипотенциала в

отсутствии магнитного поля, но его знак будет зависеть от того, как происходит приближение к электронному циклотронному резонансу.

Для выяснения характера движения электрона при различных случаях соотношения частот, найдем первый интеграл движения из уравнения (8.28) путем умножения левой и правой частей на скорость медленного движения электрона по оси OX :

$$m \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) = - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e^2 E^2(x)}{4m\omega^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)} \right] \quad (8.39).$$

Переходим в (8.39) к полным производным по времени, и получаем:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \right] = - \frac{d}{dt} \left[\frac{e^2 E^2(x)}{4m\omega^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)} \right] \quad (8.40).$$

Представляя скорость медленного движения как $\frac{\partial x}{\partial t} = V(x)$, и, интегрируя по времени, получим выражение, эквивалентное закону сохранения энергии при движении электрона в поле СВЧ квазипотенциала в присутствии постоянного однородного магнитного поля:

$$\frac{m}{2} V^2(x) + \left[\frac{e^2 E^2(x)}{4m\omega^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)} \right] = \text{const} \quad (8.41).$$

При малых значениях магнитного поля $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \ll 1$, получаем известное выражение для сохранения суммарной энергии медленного и осцилляторного движения электрона в неоднородном СВЧ поле. Из (8.41) также следует, что электрон при его движении из области сильного СВЧ поля, там, где $E^2(x)$ велико, в область слабого СВЧ поля, там, где $E^2(x)$ мало, приобретает энергию направленного движения $\frac{m}{2} V^2(x)$, соответствующее кинетической

энергии электрона, которая возрастает пропорционально уменьшению величины $E^2(x)$, т.е. происходит трансформация энергии осцилляторного движения электрона в кинетическую энергию поступательного движения.

При больших значениях магнитного поля, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \gg 1$ выражение (8.41) преобразуется к виду:

$$\frac{m}{2}V^2(x) - \left[\frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\Omega^2} \right] \approx \text{const} \quad (8.42).$$

Это означает, что в тех областях пространства, где модуль величины СВЧ квазипотенциала велик, то и кинетическая энергия электрона должна быть велика. В тех же областях пространства, где модуль СВЧ квазипотенциала мал, то там мала и кинетическая энергия. В очень сильном магнитном поле СВЧ квазипотенциал представляет собой «потенциальную яму», втягивающую электроны в область больших значений интенсивности СВЧ излучения, но при этом глубина «ямы СВЧ квазипотенциала» мала вследствие того, что $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \gg 1$.

Для резонансного случая движения электрона в области существования СВЧ квазипотенциала в присутствие магнитного поля ($\Omega \approx \omega$) закон сохранения энергии медленного движения электрона существенно зависит от того, в каком соотношении находятся частоты Ω и ω .

При разности частот, удовлетворяющей условиям $\omega - \Omega = \delta > 0$ и $\frac{\delta}{\omega} \approx \frac{\delta}{\Omega} \ll 1$, движение электрона подчиняется следующему закону:

$$\frac{m}{2}V^2(x) + \frac{e^2 E_x^2(x)}{8m\omega\delta} = \text{const} \quad (8.43).$$

При разности частот, удовлетворяющей условиям $\omega - \Omega = -\delta < 0$ и $\left| \frac{\delta}{\omega} \right| \approx \left| \frac{\delta}{\Omega} \right| \ll 1$, движение электрона подчиняется уже другому закону:

$$\frac{m}{2} V^2(x) - \frac{e^2 E_x^2(x)}{8m\omega\delta} = \text{const} \quad (8.44).$$

Из (8.43) видно, что закон медленного движения электрона в поле СВЧ квазипотенциала вблизи резонанса, но при СВЧ частотах немного превышающих частоту электронного циклотронного резонанса, по характеру такой же, как и в случае отсутствия магнитного поля: электрон «выдавливается» из области с большим значением СВЧ квазипотенциала в область с малым значением СВЧ квазипотенциала. При этом электрон набирает кинетическую энергию направленного движения.

В случае, когда частота СВЧ поля находится вблизи резонансного значения и близка к частоте электронного циклотронного резонанса, но немного ниже значения ЭЦЧ (8.44), характер движения электрона существенно изменяется: электрон из области с малым абсолютным значением отрицательного СВЧ квазипотенциала «втягивается» в область с большим абсолютным значением отрицательного СВЧ квазипотенциала. При этом знак СВЧ квазипотенциала везде отрицательный, а электрон, двигаясь по склону потенциальной «ямы» от края к ее наиболее глубокой (по энергии) области, увеличивает как свою осцилляторную энергию, так и свою кинетическую энергию направленного движения.

Лекция 9. Движение электронов в неоднородном поле СВЧ волны

$\vec{E}(y,t)$ и в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}_0$ в конфигурации

$$\nabla \vec{E}^2(y,t) \perp \vec{E}(y,t) \updownarrow \vec{e}_x \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_z$$

Рассмотрим второй случай, когда слабо неоднородное СВЧ излучение с неоднородностью электрической компоненты $E_x(y)$ взаимодействует с электронами в присутствии постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0 \updownarrow \vec{e}_z$, которое ориентировано вдоль оси OZ . Будем рассматривать конфигурацию, когда градиент неоднородности электрической компоненты СВЧ поля коллинеарен оси OY , при этом вектор электрического СВЧ поля коллинеарен оси OX . Будем рассматривать случаи только слабой неоднородности СВЧ поля, когда пространственные осцилляции электрона по оси OX $x(t) = X_0 \sin \omega t$ и по оси OY $y(t) = Y_0 \sin \omega t$ в переменном поле $E_x(y)$ значительно меньше характерного масштаба неоднородности СВЧ поля L_y :

$$L_y = \frac{E_x(y)}{\frac{\partial(E_x(y))}{\partial y}} \gg Y_0 \approx X_0 = \frac{eE_x(y)}{m\omega^2} \geq x(t) = \frac{eE_x(y)}{m\omega^2} \sin \omega t \quad (9.1).$$

Далее будем действовать аналогично лекции 8, сохраняя обозначения всех параметров. В присутствие магнитного поля $\vec{H}_0$ на электрон с зарядом $-e$ и массой m , движущейся со скоростью $\vec{V}$, действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} [\vec{V} \times \vec{H}] \quad (9.2).$$

Электрическую компоненту $\vec{E}$ неоднородного СВЧ излучения с круговой частотой ω и волновым числом k , а также постоянное однородное магнитное поле $\vec{H}_0$ представим в следующих видах:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \{E_x(y); 0; 0\} \cdot \sin(\omega t - kz) \quad (9.3)$$

$$\vec{H}_0(x, y, z) = \{0; 0; H_{oz}\} \quad (9.4).$$

Поскольку СВЧ поле неоднородно в пространстве, то, в соответствии с уравнением Максвелла, должна появиться и осциллирующая с той же частотой ω магнитная компонента СВЧ поля, которую найдем из уравнения:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (9.5).$$

Рассчитаем осциллирующие магнитные компоненты слабо неоднородного СВЧ поля, записав $\text{rot} \vec{E}$ в виде компонент вектора:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(y) \sin(\omega t - kz) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ 0; \frac{\partial}{\partial z} [E_x(y) \sin(\omega t - kz)]; -\frac{\partial}{\partial y} [E_x(y) \sin(\omega t - kz)] \right\} \end{aligned} \quad (9.6).$$

Приравнявая компоненты вектора $\text{rot} \vec{E}$ (9.6) производным по времени магнитных компонент правой части уравнения Максвелла (9.5), получаем уравнения для производных магнитных компонент по осям OY и OZ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} [E_x(y) \cdot \sin(\omega t - kz)] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{\omega y}}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial y} [E_x(y) \cdot \sin(\omega t - kz)] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{\omega z}}{\partial t} \end{aligned} \quad (9.7).$$

Здесь и далее индексы ωy и ωz обозначают компоненты СВЧ поля по осям OY и OZ соответственно, осциллирующие с круговой частотой ω .

Проведем операцию дифференцирования по координатам в явном виде в левых частях уравнений (9.7), тогда получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
-kE_x(y) \cdot \cos(\omega t - kz) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{\omega y}}{\partial t} \\
-\sin(\omega t - kz) \cdot \frac{\partial}{\partial y}[E_x(y)] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{\omega z}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{9.8}.$$

Выполнив интегрирование по времени левых частей (9.8), получим выражения для магнитных компонент неоднородного СВЧ поля, осциллирующих с частотой ω :

$$\begin{aligned}
H_{\omega y} &= \frac{kc}{\omega} E_x(y) \sin(\omega t - kz) = E_x(y) \sin(\omega t - kz) \\
H_{\omega z} &= -\frac{c}{\omega} \cos(\omega t - kz) \frac{\partial}{\partial y}[E_x(y)] = \frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial y}[E_x(y)] \sin(\omega t - kz - \frac{\pi}{2})
\end{aligned} \tag{9.9},$$

где учтено, что $\frac{kc}{\omega} = 1$. Из (9.9) видно, что магнитная компонента $H_{\omega y}$ осциллирует синхронно с электрической компонентой СВЧ поля, и ортогональна ей. Эта компонента присуща плоской электромагнитной волне вне зависимости от характера неоднородности СВЧ поля. Магнитная компонента $H_{\omega z}$ также является осциллирующей с частотой ω , но запаздывает по фазе на $\pi/2$ относительно электрической СВЧ компоненты. Эта компонента осциллирующего магнитного поля связана с неоднородностью электрической компоненты СВЧ поля. Таким образом, формулы (9.9) определяют осциллирующие магнитные компоненты СВЧ поля, а формула (9.4) постоянное магнитное поле.

Поскольку определены полностью все компоненты магнитных полей, то можно рассчитать компоненты силы Лоренца, определяемые векторным произведением скорости электрона $\vec{V}$ и постоянным $\vec{H}_0$ и переменным магнитными полями $\vec{H}_\omega = \{0; H_{\omega y}; H_{\omega z}\}$:

$$\begin{aligned}
-\frac{e}{c}[\vec{V} \times \vec{H}] &= -\frac{e}{c} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ 0 & H_{\omega y} & H_{\omega z} + H_{\omega z} \end{vmatrix} = \\
&= -\frac{e}{c} \left\{ \frac{\partial y}{\partial t} (H_{\omega z} + H_{\omega z}) - \frac{\partial z}{\partial t} H_{\omega y}; -\frac{\partial x}{\partial t} (H_{\omega z} + H_{\omega z}); \frac{\partial x}{\partial t} H_{\omega y} \right\}
\end{aligned} \tag{9.10}.$$

Используя (9.10) и общее выражение для силы Лоренца (9.2), учитывающее как электрическую, так и магнитные компоненты, получим следующую систему уравнений, описывающих движение электрона по осям OX , OY , OZ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(y)}{m} \sin(\omega t - kz) - \frac{e}{mc} \left[\frac{\partial y}{\partial t} (H_{\omega z} + H_{\omega z}) - \frac{\partial z}{\partial t} H_{\omega y} \right] \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \left(-\frac{e}{mc}\right) \left(-\frac{\partial x}{\partial t}\right) [H_{\omega z} + H_{\omega z}] \\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{mc} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \cdot H_{\omega y}
\end{aligned} \tag{9.11}.$$

Будем рассматривать только случай нерелятивистского движения электронов в неоднородном СВЧ поле и в постоянном однородном магнитном поле, полагая:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \ll 1; \quad \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \ll 1; \quad \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \ll 1 \tag{9.12}.$$

Тогда из (9.11) следует, что правая часть уравнения движения электрона по оси OZ является релятивистски малой. Это позволяет считать, что ускоренное движение электрона по оси OZ отсутствует ($\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \approx 0$). Не ограничивая общности рассмотрения, можно положить, что $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, $z = 0$. На этом основании далее опустим параметр kz в аргументе функций $\sin(\omega t - kz)$ и $\cos(\omega t - kz)$. Далее обозначим величину $\frac{eH_{0z}}{mc} = \Omega$, которая как было принято ранее, называется электронной циклотронной частотой (ЭЦЧ).

Подставим теперь в явном виде выражения для осциллирующих магнитных компонент из (9.9) в систему уравнений (9.11), и получим следующую упрощенную систему динамических уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(y)}{m}\sin(\omega t) - \Omega \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{e}{m\omega} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial E_x(y)}{\partial y} \cos(\omega t) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \Omega \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{e}{mc} \frac{\partial x}{\partial t} \left\{ -\frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial y} [E_x(y) \cos(\omega t)] \right\}\end{aligned}\quad (9.13).$$

Третий член в правой части первого уравнения (9.13) является малым по сравнению с первым членом на основании условия слабой неоднородности СВЧ поля (9.1), что следует из ниже приведенных оценок:

$$\begin{aligned}\frac{e}{m\omega} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial E_x(y)}{\partial y} \cos(\omega t) &= \omega \frac{eE_x(y)}{m\omega^2} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{1}{E_x(y)} \frac{\partial E_x(y)}{\partial y} \cos(\omega t) \approx \\ &\approx \omega \frac{\partial y}{\partial t} \frac{X_0}{L_y} \cos(\omega t) \ll \frac{eE_x(y)}{m} \sin(\omega t); \\ X_0 &= \frac{eE_x(y)}{m\omega^2}\end{aligned}\quad (9.14).$$

Тогда упрощенное уравнение движения электрона по оси OX и выражение для скорости $\frac{\partial x}{\partial t}$, полученное в результате интегрирования по времени,

будут выглядеть так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(y)}{m}\sin(\omega t) - \Omega \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{eE_x(y)}{m\omega} \cos(\omega t) - \Omega y\end{aligned}\quad (9.15).$$

Подставляя из (9.15) выражение $\frac{\partial x}{\partial t}$ во второе уравнение системы (9.13),

получим преобразованное уравнение движения электрона по оси OY :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\Omega}{\omega} \frac{eE_x(y)}{m} \cos(\omega t) - \Omega^2 y - \\ &- \frac{e^2 E_x(y)}{m^2 \omega^2} \cos^2(\omega t) \frac{\partial E_x(y)}{\partial y} + \frac{e}{m} \frac{\Omega}{\omega} y \cos(\omega t) \frac{\partial E_x(y)}{\partial y}\end{aligned}\quad (9.16).$$

Из анализа (9.16) следует, что по оси OY движение электрона можно разделить на быстрое осциллирующее со знакопеременной силой (первый член и второй члены) и медленное движение, связанное с градиентом СВЧ поля (третий и четвертый члены). Выделив из (9.16) члены, отвечающие за быстрое движение (осциллирующие с частотой ω), получим следующие уравнение для быстрого движения $y_{\omega}(t)$ по оси OY :

$$\frac{\partial^2 y_{\omega}}{\partial t^2} + \Omega^2 y_{\omega} = \frac{eE_x(y)}{m} \frac{\Omega}{\omega} \cos(\omega t) \quad (9.17).$$

Уравнение (9.17) представляет собой классическое уравнение колебаний с вынуждающей гармонической силой в правой части уравнения. Из теории колебаний хорошо известно, что общее решение неоднородного уравнения (9.17) будет состоять из суммы частного решения этого уравнения (гармонические осцилляции с частотой ω) и общего решения однородного уравнения (собственные гармонические осцилляции с частотой Ω). При наличии даже слабого затухания собственные гармонические осцилляции с частотой Ω затухают, и тогда остается только частное решение неоднородного уравнения, обусловленного действием вынуждающей силы, осциллирующей с частотой ω . Пренебрегая переходными процессами затухания собственных колебаний, будем искать установившееся решение уравнения (9.17) в следующем виде $y_{\omega}(t) = Y_0 \cos(\omega t)$. Тогда дифференциальное уравнение преобразуется в алгебраическое, из которого вычисляем амплитуду Y_0 и получаем решение уравнения (9.17) $y_{\omega}(t)$:

$$Y_0 = \frac{eE_x(y)}{m(\Omega^2 - \omega^2)} \frac{\Omega}{\omega} \quad (9.18).$$

$$y_{\omega}(t) = Y_0 \cos(\omega t) = \frac{eE_x(y)}{m(\Omega^2 - \omega^2)} \frac{\Omega}{\omega} \cos(\omega t)$$

Учитывая выражение (9.18), и подставляя его в те члены в правой части (9.16), которые связаны с градиентом СВЧ поля и отвечают за медленное

движение электрона, получаем следующее уравнение, описывающее медленное движение $y_g(t)$ электронов по координате OY :

$$m \frac{\partial^2 y_g}{\partial t^2} = -\frac{e^2 E_x(y)}{m\omega^2} \cos^2(\omega t) \frac{\partial E_x(y)}{\partial y} + \frac{e}{m} \frac{\Omega}{\omega} \frac{e E_x(y)}{(\Omega^2 - \omega^2)} \frac{\Omega}{\omega} \cos^2(\omega t) \frac{\partial E_x(y)}{\partial y} \quad (9.19).$$

Усредняем (9.19) по периоду СВЧ поля и, заменяя $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$, получим уравнение, описывающее медленное движение электрона по оси OY :

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 y_g}{\partial t^2} &= -\frac{e^2 E_x(y)}{2m\omega^2} \frac{\partial E_x(y)}{\partial y} - \frac{e^2 E_x(y)}{2m\omega^2} \frac{\partial E_x(y)}{\partial y} \frac{\Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)} = \\ &= -\frac{e^2 E_x(y)}{2m\omega^2} \frac{\partial E_x(y)}{\partial y} \left[1 + \frac{\Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)} \right] = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \right] \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)} \end{aligned} \quad (9.20)$$

Полученное уравнение (9.20) описывает медленное движение электрона в неоднородном СВЧ поле с градиентом неоднородности, ортогональным вектору электрической компоненты поля при наличии однородного постоянного магнитного поля, вектор которого ортогонален как вектору электрической компоненте СВЧ поля, так и градиенту неоднородности.

Уравнение (9.20) можно интерпретировать как уравнение для медленного движения электрона в поле градиента СВЧ квазипотенциала $\Phi_{\omega H}(y)$ в присутствии однородного магнитного поля. Это уравнение схоже по структуре с уравнением движения в неоднородном поле СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля (см. лекцию 6), но отличается множителем $\frac{\omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)} \equiv \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})}$, который связан со спецификой движения

электрона в магнитном поле:

$$\Phi_{\omega H}(y) = \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \equiv \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} \quad (9.21).$$

При малых постоянных однородных магнитных полях, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \ll 1$, СВЧ квазипотенциал в магнитном поле практически совпадает с СВЧ потенциалом в отсутствии магнитного поля:

$$\Phi_{\omega H}(y) = \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \quad (9.22).$$

При больших значениях магнитного поля, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} > 1$ СВЧ квазипотенциала меняет знак и становится «отрицательным»:

$$\Phi_{\omega H}(y) = -\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1)} \quad (9.23).$$

При очень сильных магнитных полях, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \gg 1$ величина СВЧ квазипотенциала будет отрицательна и значительно меньше по величине СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля:

$$\Phi_{\omega H}(y) = -\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1)} \approx -\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2 \Omega^2} \cdot \omega^2 = -\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\Omega^2} \quad (9.24).$$

$$\left| -\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\Omega^2} \right| \ll \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2}$$

Рассмотрим поведение СВЧ квазипотенциала вблизи электронного циклотронного резонанса, т.е. когда $\Omega \approx \omega$. Сначала рассмотрим подход к резонансу со стороны больших частот СВЧ излучения, т.е. когда выполняются соотношения:

$$\omega - \Omega = \delta > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{\omega} \approx \frac{\delta}{\Omega} \ll 1 \quad (9.25).$$

Для этого случая рассчитаем величину резонансного множителя СВЧ квазипотенциала:

$$1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2} = \frac{(\omega - \Omega)(\omega + \Omega)}{\omega^2} \approx \frac{2\delta\omega}{\omega^2} = \frac{2\delta}{\omega} \approx \frac{2\delta}{\Omega} \ll 1 \quad (9.26).$$

Подставляем (9.26) в выражение для СВЧ квазипотенциала (9.21), и получаем значение $\Phi_H(y)$ для случая приближения частоты СВЧ поля к электронной циклотронной частоте со стороны больших СВЧ частот ($\omega \Rightarrow \Omega$; $\omega > \Omega$):

$$\Phi_{\omega H}(y) = \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2 \cdot \frac{2\delta}{\omega}} = \frac{e^2 E_x^2(y)}{8m\omega\delta} \gg \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \quad (9.27).$$

Из (9.27) видно, что знак СВЧ квазипотенциала соответствует знаку СВЧ квазипотенциала в отсутствии магнитного поля. В то же время его величина может значительно превосходить величину СВЧ квазипотенциала в отсутствии магнитного поля.

Теперь рассмотрим подход к резонансу со стороны малых частот СВЧ излучения ($\omega \Rightarrow \Omega$; $\omega < \Omega$), т.е. когда выполняются соотношения:

$$\omega - \Omega = -\delta < 0 \quad \text{и} \quad \left| \frac{\delta}{\omega} \right| \approx \left| \frac{\delta}{\Omega} \right| \ll 1 \quad (9.28).$$

Для этого случая резонансный множитель СВЧ квазипотенциала меняет знак:

$$1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2} = \frac{(\omega - \Omega)(\omega + \Omega)}{\omega^2} \approx -\frac{2\delta\omega}{\omega^2} = -\frac{2\delta}{\omega} \approx -\frac{2\delta}{\Omega} < 0 \quad (9.29).$$

и $\left| \frac{2\delta}{\Omega} \right| \ll 1$

Подставляем (9.29) в выражение для СВЧ квазипотенциала (9.21), и получаем значение СВЧ квазипотенциала $\Phi_{\omega H}(y)$ для случая приближения частоты СВЧ поля к резонансной электронной циклотронной частоте со стороны малых частот $\omega \leq \Omega$:

$$\Phi_{\omega H}(y) = \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx -\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2 \cdot 2\delta/\omega} = -\frac{e^2 E_x^2(y)}{8m\omega\delta} \quad (9.30).$$

$$\left| \frac{e^2 E_x^2(y)}{8m\omega\delta} \right| \gg \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2}$$

Из (9.30) видно, что для этого резонансного случая абсолютная величина СВЧ квазипотенциала может значительно превосходить значение СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля, но его знак отрицательный, и противоположен знаку обычного СВЧ квазипотенциала. Для резонансного случая $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \approx 1$ абсолютная величина СВЧ квазипотенциала может значительно превосходить величину СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля.

Для выяснения характера движения электрона в различных случаях соотношения частот, найдем первый интеграл движения путем умножения левой и правой частей уравнения (9.20) на скорость $\frac{\partial y}{\partial t}$ медленного движения электрона по оси OY :

$$m \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \right] \quad (9.31),$$

или, переходя в левой и правой частях к полным производным по времени, получаем:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] = - \frac{d}{dt} \left[\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \right] \quad (9.32).$$

Заменяя $\frac{\partial y}{\partial t} = V(y)$, и, интегрируя по времени, получим выражение, эквивалентное закону сохранения энергии при движении электрона в

пространственно неоднородном поле СВЧ квазипотенциала в присутствии однородного магнитного поля:

$$\frac{m}{2}V^2(y) + \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2})} = \text{const} \quad (9.33).$$

При малых значениях магнитного поля, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \ll 1$, получаем известное выражение закона сохранения энергии для движения электрона в неоднородном СВЧ поле. Из (9.33) следует также, что электрон при его движении из области сильного СВЧ поля, там, где $E_x^2(y)$ велико, в область слабого СВЧ поля, там, где $E_x^2(y)$ мало, приобретает кинетическую энергию направленного движения против градиента СВЧ квазипотенциала. Это означает, что величина $\frac{m}{2}V^2(y)$, эквивалентная кинетической энергии для медленного движения электрона, возрастает пропорционально уменьшению величины $E_x^2(y)$.

При больших значениях магнитного поля, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \gg 1$ выражение (9.33) преобразуется к виду:

$$\frac{m}{2}V^2(y) - \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\Omega^2} \approx \text{const} \quad (9.34).$$

Это означает, что в тех областях пространства, где величина СВЧ квазипотенциала $\Phi_{\omega H}$ велика, там и кинетическая энергия медленного движения электрона велика. В тех же областях пространства, где СВЧ квазипотенциал $\Phi_{\omega H}$ мал, мала и кинетическая энергия направленного медленного движения электрона. В очень сильном магнитном поле СВЧ квазипотенциал представляет собой «потенциальную ямку», втягивающую электроны в область больших значений интенсивности СВЧ излучения. Но

при этом абсолютная величина СВЧ квазипотенциала мала вследствие того, что $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \gg 1$.

Для резонансных случаев движения электрона в градиентном поле СВЧ квазипотенциала в присутствие магнитного поля, когда $\Omega \approx \omega$ закон сохранения энергии медленного движения существенно зависит от того, в каком соотношении находятся частоты Ω и ω . При разности частот $\omega - \Omega = \delta > 0$ и $\frac{\delta}{\omega} \approx \frac{\delta}{\Omega} \ll 1$ движение электрона подчиняется следующему закону:

$$\frac{m}{2} V^2(y) + \frac{e^2 E_x^2(y)}{8m\omega\delta} = \text{const} \quad (9.35).$$

При разности частот $\omega - \Omega = -\delta < 0$ и $\left| \frac{\delta}{\omega} \right| \approx \left| \frac{\delta}{\Omega} \right| \ll 1$ движение электрона подчиняется другому закону:

$$\frac{m}{2} V^2(y) - \frac{e^2 E_x^2(y)}{8m\omega\delta} = \text{const} \quad (9.36).$$

Из (9.36) видно, что закон медленного движения электрона в градиентном поле СВЧ квазипотенциала вблизи резонанса при СВЧ частотах немного превышающих частоту электронного циклотронного резонанса $\omega > \Omega$, по характеру такой же, как и в случае отсутствия магнитного поля: электрон «выдавливается» из области с большим значением СВЧ квазипотенциала в область с малым значением СВЧ квазипотенциала. При таком движении электрон набирает кинетическую энергию.

В случае, когда частота СВЧ поля находится вблизи резонансного значения и близка к частоте электронного циклотронного резонанса, но немного ниже его резонансного значения $\omega \leq \Omega$, характер движения электрона существенно изменяется: СВЧ квазипотенциал становится отрицательным (т.е. для электрона возникает потенциальная яма), и электрон «втягивается» в область с большим отрицательным значением СВЧ

квазипотенциала. При движении электрона из области с малым абсолютным значением отрицательного СВЧ квазипотенциала в область с большим абсолютным значением отрицательного СВЧ квазипотенциала электрон набирает и кинетическую энергию.

На основе представленной теории СВЧ квазипотенциала в магнитном поле в Российском университете дружбы народов были выполнены экспериментальные исследования по улучшению удержания плазмы в открытых магнитных ловушках типа «пробкотрон». В результате реализации соответствующих экспериментальных условий (подвод СВЧ поля в область магнитных пробок при частоте СВЧ близкой к электронной циклотронной частоте) было показано, что в магнитном поле пробки возникает квазипотенциальный энергетический барьер для частиц, выходящих из ловушки в конусе потерь. В Физическом институте им. П.Н. Лебедева АН СССР были выполнены экспериментальные исследования по удержанию плазмы в СВЧ резонаторе со структурой полей, способных удерживать плазму вследствие формирования такой структуры СВЧ квазипотенциала, при которой создается СВЧ квазипотенциальная яму в центре резонатора.

Задача 9.1. Определить возможность прохождения электронного пучка с энергией 100 эВ через область фокуса потока СВЧ волны с линейной частотой $f=7$ ГГц как в присутствии магнитного поля с индукцией $B=3800$ Гс, так и отсутствии магнитного поля. Мощностью СВЧ излучения $P=100$ МВт. В фокусе СВЧ излучения формируется гауссово распределение интенсивности с характерным радиусом $a=2$ см. Постоянное магнитное поле ориентировано вдоль направления распространения сфокусированного потока СВЧ волны по оси OZ , электрическая компонента СВЧ волны коллинеарна оси OX , градиент неоднородности электрической компоненты СВЧ поля коллинеарен оси OY .

Решение.

Величина СВЧ квазипотенциала в магнитном поле определяется выражением вида:

$$\Phi_{\omega H}(y) = \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})}$$

Определим величины и соотношение входящих в выражение частот – электронную циклотронную частоту Ω и круговую частоту СВЧ излучения ω :

$$\Omega = \frac{eB}{mc} = \frac{4.8 \cdot 10^{-10} \cdot 3800}{9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 3 \cdot 10^{10}} \approx 6.68 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}; \quad \Omega^2 \approx 4.46 \cdot 10^{21} \text{ с}^{-2}$$

$$\omega = 2\pi f = 6.28 \cdot 7 \cdot 10^9 \approx 4.40 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}; \quad \omega^2 \approx 1.94 \cdot 10^{21} \text{ с}^{-2}$$

Из сравнения квадратов частот видно, что $\Omega^2 > \omega^2$, т.е. форма СВЧ квазипотенциала соответствует потенциальной «яме». Рассчитаем величину СВЧ квазипотенциала, определив интенсивность I_0 и квадрат электрического поля E_0^2 в фокусе СВЧ излучения. Гауссово пространственное распределение интенсивности $I(r)$ по радиусу r в фокусе СВЧ излучения имеет вид $I(r) = I_0 \exp(-\frac{r^2}{a^2})$. Связи полной мощности СВЧ излучения в фокусе с интенсивностью в центре фокуса I_0 и с квадратом амплитуды электрического СВЧ поля E_0^2 определяется из следующих соотношений:

$$P = \int_0^\infty I_0 \exp(-\frac{r^2}{a^2}) 2\pi r dr = I_0 \pi a^2$$

$$I_0 = \frac{E_0^2}{8\pi} c$$

$$E_0^2 = \frac{8\pi I_0}{c} = \frac{8\pi}{c} \frac{P}{\pi a^2} = \frac{8P}{ca^2}$$

Численное максимальное значение СВЧ квазипотенциала в центре фокуса определим из выражения:

$$\Phi_{\omega H-\max} = \frac{e^2 E_0^2}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} = \frac{8e^2 P}{4mca^2(\omega^2 - \Omega^2)} \approx$$

$$\approx \frac{8 \cdot 23 \cdot 10^{-20} \cdot 10^8 \cdot 10^7}{4 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot (1.93 - 4.46) \cdot 10^{21} \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}} \approx -1040 \text{ эВ}$$

Далее рассчитаем максимальное значение СВЧ квазипотенциал в центре фокуса СВЧ излучения в отсутствии магнитного поля:

$$\Phi_{\omega-\max} = \frac{e^2 E_x^2(y=0)}{4m\omega^2} = \frac{8e^2 P}{4mca^2\omega^2} \approx$$

$$\approx \frac{8 \cdot 23 \cdot 10^{-20} \cdot 10^8 \cdot 10^7}{4 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot 1.94 \cdot 10^{21} \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}} \approx 1360 \text{ эВ}$$

Ответ.

В отсутствии постоянного однородного магнитного поля СВЧ квазипотенциал для электронов представляет собой потенциальный «холм» с максимальным значение СВЧ квазипотенциала 1360 эВ, что является непреодолимой преградой для электронов с энергией 100 эВ.

В присутствии магнитного поля СВЧ квазипотенциал представляет собой энергетическую «яму» с глубиной в центре фокуса около –1040 эВ. При движении электрона через такую потенциальную яму СВЧ квазипотенциала электроны пучка при движении через фокус сначала наберут кинетическую энергию на первом склоне ямы, а затем ее потеряет на другом склоне, т.е. электроны пучка пройдут сквозь СВЧ квазипотенциал и не потеряет свою начальную энергию 100 эВ.

Лекция 10. Движение электронов в неоднородном поле СВЧ волны

$\vec{E}(y,t)$ и в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}_0$ в конфигурации

$$\nabla \vec{E}^2(y,t) \parallel \vec{e}_y \perp \vec{E}(y,t) \uparrow \downarrow \vec{e}_x \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_y$$

Рассмотрим третий случай, когда неоднородное СВЧ поле с неоднородностью по оси OY электрической компоненты, которая коллинеарна оси OX : $\vec{E}(y) = \{E_x(y), 0, 0\}$. Это случай, когда градиент неоднородности СВЧ поля $\nabla \vec{E}^2(y)$ ортогонален с осциллирующим вектором электрической компоненты СВЧ поля $\nabla \vec{E}^2(y) \perp \vec{E}(y)$. Будем рассматривать такие случаи неоднородности поля, когда амплитуда осцилляции электрона X_0 по оси OX и амплитуда осцилляции Y_0 по оси OY в СВЧ поле значительно меньше характерного масштаба неоднородности СВЧ поля L_y :

$$L_y = \frac{E_x(y)}{\frac{\partial E_x(y)}{\partial y}} \gg X_0 \approx \frac{eE_0}{m\omega^2} \gg Y_0 \quad (10.1).$$

Будем рассматривать движение электрона с нерелятивистскими скоростями в присутствии постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$, ориентированного параллельно оси OY и ортогонально электрической компоненте СВЧ поля $\vec{E}(y) \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_y$. В присутствии электрического и магнитного полей СВЧ волны и постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$ на электрон действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} \cdot [\vec{V} \times \vec{H}] \quad (10.2),$$

здесь $\vec{H}$ – сумма магнитного поля СВЧ волны и постоянного однородного магнитного поля, c – скорость света в вакууме, $-e$ – заряд электрона. Электрическую компоненту неоднородного СВЧ поля с круговой частотой ω

и волновым вектором k , а также однородное постоянное магнитное поле представляем в следующих видах:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \{E_x(y); 0; 0\} \sin(\omega t - kz) \quad (10.3),$$

$$\vec{H}_0 = \{0; H_{oy}; 0; \} \quad (10.4).$$

Поскольку осциллирующее с частотой ω СВЧ поле неоднородно в пространстве, то в соответствии с уравнением Максвелла должно появиться осциллирующее с той же частотой ω и магнитная компонента поля, которую можно определить из уравнения:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (10.5).$$

Рассчитаем осциллирующие производные магнитных компонент неоднородного СВЧ поля из уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(y) \sin(\omega t - kz) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ 0; \frac{\partial}{\partial z} [E_x(y) \sin(\omega t - kz)]; -\frac{\partial}{\partial y} [E_x(y) \sin(\omega t - kz)] \right\} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.6).$$

Приравняем компоненты вектора $\text{rot } \vec{E}$, вычисленные в (10.6), производным по времени магнитным компонентам уравнения (10.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} [E_x(y) \cdot \sin(\omega t - kz)] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{\omega y}}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial y} [E_x(y) \cdot \sin(\omega t - kz)] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{\omega z}}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.7).$$

Здесь и далее индексы ωy и ωz обозначают переменные во времени компоненты магнитного поля, коллинеарные осям OY и OZ соответственно, и осциллирующие с круговой частотой СВЧ поля ω .

Проведем операцию дифференцирования по координатам в явном виде в левых частях уравнений (10.7), тогда получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} -kE_x(y) \cdot \cos(\omega t - kz) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{\omega y}}{\partial t} \\ -\sin(\omega t - kz) \cdot \frac{\partial}{\partial y} [E_x(y)] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{\omega z}}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.8).$$

Выполнив операцию интегрирования по времени уравнений (10.8), получим в явном виде выражения для осциллирующих с частотой ω магнитных компонент неоднородного СВЧ поля,:

$$\begin{aligned} H_{\omega y} &= \frac{kc}{\omega} E_x(y) \sin(\omega t - kz) = E_x(y) \sin(\omega t - kz) \\ H_{\omega z} &= -\frac{c}{\omega} \cos(\omega t - kz) \frac{\partial}{\partial y} [E_x(y)] = \frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial y} [E_x(y)] \sin(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (10.9),$$

Если учесть равенство $\frac{kc}{\omega} = 1$, то из (10.9) видно, что магнитная компонента

$H_{\omega y}$ осциллирует синхронно с электрической компонентой СВЧ поля, и ортогональна ей, и она является компонентой, присущей электромагнитной волне вне зависимости от характера неоднородности СВЧ поля. Магнитная компонента $H_{\omega z}$ также является осциллирующей с частотой ω , но сдвинута по фазе на $\pi/2$ относительно электрической компоненты, и эта магнитная компонента связана с неоднородным характером электрической компоненты СВЧ поля. Таким образом, формулы (10.9) определяют осциллирующие магнитные компоненты СВЧ поля, а формула (10.4) постоянное магнитное поле. Поскольку определены полностью все конфигурации магнитных полей, то можно рассчитать компоненты силы Лоренца $-\frac{e}{c} [\vec{V} \times \vec{H}]$, обусловленные магнитными полями:

$$\begin{aligned}
-\frac{e}{c}[\vec{V} \times \vec{H}] &= -\frac{e}{c} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ 0 & H_{oy} + H_{\omega y} & H_{\omega z} \end{vmatrix} = \\
&= -\frac{e}{c} \left\{ \frac{\partial y}{\partial t} H_{\omega z} - \frac{\partial z}{\partial t} (H_{oy} + H_{\omega y}) ; -\frac{\partial x}{\partial t} H_{\omega z} ; \frac{\partial x}{\partial t} (H_{oy} + H_{\omega y}) \right\}
\end{aligned} \tag{10.10}.$$

Учитывая (10.10), (10.9) и общее выражение для силы Лоренца (10.2), получим следующую систему уравнений, описывающих движения электрона по осям OX , OY , OZ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(y)}{m} \sin(\omega t - kz) - \frac{e}{mc} \left\{ \frac{\partial y}{\partial t} H_{\omega z} - \frac{\partial z}{\partial t} H_{oy} - \frac{\partial z}{\partial t} H_{\omega y} \right\} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{e}{mc} \frac{\partial x}{\partial t} H_{\omega z} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{mc} \frac{\partial x}{\partial t} (H_{oy} + H_{\omega y})
\end{aligned} \tag{10.11}.$$

Подставляя в (10.11) в явном виде выражения для электрической и магнитной компонент (10.9), получим следующую систему уравнений, описывающих движение электрона:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(y)}{m} \sin(\omega t - kz) - \frac{e}{mc} \left\{ \frac{\partial y}{\partial t} \left[-\frac{c}{\omega} \cos(\omega t - kz) \frac{\partial E_x(y)}{\partial y} \right] \right\} + \\
&\quad + \frac{e}{mc} \frac{\partial z}{\partial t} H_{oy} + \frac{e}{mc} \frac{\partial z}{\partial t} E_x(y) \sin(\omega t - kz) \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{e}{mc} \frac{\partial x}{\partial t} \left\{ -\frac{c}{\omega} \cos(\omega t - kz) \frac{\partial E_x(y)}{\partial y} \right\} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{mc} \frac{\partial x}{\partial t} [H_{oy} + E_x(y) \cos(\omega t - kz)]
\end{aligned} \tag{10.12}$$

Проведем упрощение первого уравнения системы уравнений (10.12), опираясь на ограничения нерелятивистскими скоростями электронов:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \ll 1; \quad \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \ll 1; \quad \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \ll 1 \tag{10.13}.$$

Тогда в системе уравнений (10.12) в первом приближении можем пренебречь членами, содержащие множители типа $\frac{1}{c} \frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{1}{c} \frac{\partial y}{\partial t}$ за исключением члена, содержащего значение постоянного магнитного поля H_{oy} , т.к. эта величина может быть довольно большой. Также можно опустить малый второй член по сравнению с первым членом первого уравнения системы (10.12), т.к. отношение второго члена к первому можно свести к отношению амплитуды осцилляции электрона к характерному размеру неоднородности поля, и это отношение согласно (10.1) является малым параметром. Введя обозначение электронной циклотронной частоты $\frac{eH_{oy}}{mc} = \Omega$, получим упрощенную систему, описывающую движение электрона в неоднородном СВЧ поле и в постоянном однородном магнитном поле:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(y)}{m} \cdot \sin(\omega t - kz) + \Omega \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{e}{m\omega} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial E_x(y)}{\partial y} \cdot \cos(\omega t - kz) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{mc} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \cdot [H_{oy} + E_x(y) \cos(\omega t - kz)]\end{aligned}\quad (10.14).$$

Поскольку далее будем рассматривать движение электрона в конфигурации полей $\nabla \vec{E}^2(y, t) \perp \vec{E}(y, t) \uparrow \vec{e}_x \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_y$, то в аргументе функций $\sin(\omega t - kz)$ и $\cos(\omega t - kz)$ сохраним только часть, связанную с временной переменной ωt , т.к. величина kz оказывается малой по сравнению ωt : $kz = \frac{\omega z}{c} \approx \frac{\omega t}{c} \frac{z}{t} \approx \omega t \frac{1}{c} \frac{\partial z}{\partial t} \ll \omega t$.

Проведя интегрирование по времени первого уравнения системы (10.14) получим приближенное выражение для скорости электрона по оси Ox в следующем виде:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{eE_x(y)}{m\omega} \cos(\omega t) + \Omega z \quad (10.15).$$

Подставляя выражение (10.15) в третье уравнение системы (10.14), учитывая нерелятивистский характер движения электрона и пренебрегая малым вторым членом в правой части третьего уравнения (10.14), получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \Omega^2 z = -\Omega \frac{eE_x(y)}{m\omega} \cos(\omega t) \quad (10.16).$$

Уравнение (10.16) представляет собой каноническое уравнение осциллятора с вынуждающей внешней силой в правой части. Решение этого уравнения будем синхронно осциллирующим с вынуждающей силы:

$$z(t) = Z_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (10.17).$$

Подставляя (10.17) в уравнение (10.16) и проведя вычисления, получим алгебраическое уравнение, из которого находим амплитуду осцилляций Z_0 :

$$\begin{aligned} -\omega^2 Z_0 \cos(\omega t) + \Omega^2 Z_0 \cos(\omega t) &= -\Omega \frac{eE_x(y)}{m\omega} \cos(\omega t) \\ Z_0 &= -\Omega \frac{eE_x(y)}{m\omega} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} = \frac{\Omega}{\omega} \frac{eE_x(y)}{m} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \end{aligned} \quad (10.18).$$

Из (10.18) и (10.17) получаем выражения для проекций координаты и скорости электрона на ось OZ :

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{\Omega}{\omega} \frac{eE_x(y)}{m} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\omega t) \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -\frac{\Omega}{\omega} \frac{eE_x(y)}{m} \frac{\omega}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\omega t) = -\frac{eE_x(y)}{m} \frac{\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (10.19).$$

Подставляя выражение $\frac{\partial z}{\partial t}$ из (10.19) в первое уравнение системы (10.14), описывающее движение электрона по оси OX , получаем уточненное уравнение движения по этой оси в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(y)}{m} \sin(\omega t) + \Omega \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{eE_x(y)}{m} \sin(\omega t) - \frac{eE_x(y)}{m} \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\omega t) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(y)}{m} \sin(\omega t) \left[1 + \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \right] = -\frac{eE_x(y)}{m} \sin(\omega t) \frac{1}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)} \end{aligned} \quad (10.20).$$

Из (10.20) вычисляем осцилляторную скорость электрона по оси OX :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{eE_x(y)}{m\omega} \cos(\omega t) \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \quad (10.21).$$

Выражение (10.21) подставим во второе уравнение системы (10.14) и получим уравнение движения электрона, описывающее его медленное движение по оси OY , обусловленное наличием градиента СВЧ поля:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{e^2 E_x(y)}{m^2 \omega^2} \cos^2(\omega t) \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \frac{\partial E_x(y)}{\partial y} \quad (10.22).$$

Усреднение (10.22) по многим периодам СВЧ поля дает $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$.

Вводя под знак дифференциала электрическую компоненту СВЧ поля, получим следующее уравнение движение электрона по оси OY :

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \right] \quad (10.23).$$

Умножением на $\frac{\partial y}{\partial t}$ уравнения (10.23) переходим от частных производных к полным производным по времени. Окончательно получаем первый интеграл движения в результате следующих преобразований:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \right] \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m}{2} \left[\frac{\partial y}{\partial t} \right]^2 \right\} &= -\frac{d}{dt} \left[\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \right] \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{mV_y^2}{2} + \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \right] &= 0 \\ \frac{mV_y^2}{2} + \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} &= \text{const} \end{aligned} \quad (10.24).$$

Таким образом, в условиях, когда электрическая компонента неоднородного СВЧ поля $\vec{E}(y)$ коллинеарна оси OX с неоднородностью по оси OY , а постоянное однородное магнитное поле $\vec{H}_0$ ориентировано также по оси OY , формируется СВЧ квазипотенциал $\Phi_{\omega H}(y)$, который имеет вид:

$$\Phi_{\omega H}(y) = \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} = \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} \quad (10.25).$$

При малых постоянных магнитных полях, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \ll 1$, СВЧ квазипотенциал практически совпадает с СВЧ потенциалом в отсутствие магнитного поля:

$$\Phi_{\omega H}(y) = \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \quad (10.26).$$

При больших значениях магнитного поля, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} > 1$, СВЧ квазипотенциал меняет знак и становится отрицательным:

$$\Phi_{\omega H}(y) = \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} = -\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1)} \quad (10.27).$$

При очень сильных магнитных полях, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \gg 1$, величина СВЧ квазипотенциала будет отрицательна и значительно меньше по величине СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля.

$$\Phi_{\omega H}(y) = -\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1)} \approx -\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\Omega^2} \ll -\frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \quad (10.28).$$

Рассмотрим СВЧ квазипотенциал вблизи электронного циклотронного резонанса, т.е. когда $\Omega \approx \omega$. Сначала рассмотрим подход к резонансу со

стороны больших частот СВЧ излучения, т.е. когда выполняются соотношения:

$$\omega - \Omega = \delta > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{\omega} \approx \frac{\delta}{\Omega} \ll 1 \quad (10.29).$$

Для этого случая рассчитаем величину резонансного множителя СВЧ квазипотенциала:

$$1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2} = \frac{(\omega - \Omega)(\omega + \Omega)}{\omega^2} \approx \frac{\delta 2\omega}{\omega^2} = \frac{2\delta}{\omega} \approx \frac{2\delta}{\Omega} \ll 1 \quad (10.30).$$

Подставляем (10.30) в выражение для СВЧ квазипотенциала (10.25), и получаем значение $\Phi_{\omega H}(y)$ для случая приближения частоты СВЧ поля к резонансной электронной циклотронной частоте со стороны больших СВЧ частот $\omega > \Omega$:

$$\Phi_{\omega H}(y) = \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2 \cdot \frac{2\delta}{\omega}} = \frac{e^2 E_x^2(y)}{8m\omega\delta} \gg \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \quad (10.31).$$

Из (10.31) видно, что знак СВЧ квазипотенциала положительный. В то же время его величина может значительно превосходить величину СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля.

Теперь рассмотрим подход к резонансу со стороны малых СВЧ частот, когда выполняются соотношения:

$$\omega - \Omega = -\delta < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{\omega} \approx \frac{\delta}{\Omega} \ll 1 \quad (10.32).$$

Для этого случая величина резонансного множителя СВЧ квазипотенциала поменяет знак:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} &= \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2} = \frac{(\omega - \Omega)(\omega + \Omega)}{\omega^2} \approx \\ &\approx -\frac{\delta 2\omega}{\omega^2} = -\frac{2\delta}{\omega} \approx -\frac{2\delta}{\Omega} < 0 \\ \text{и} \quad &\left| \frac{2\delta}{\Omega} \right| \ll 1 \end{aligned} \quad (10.33).$$

Подставляя (10.33) в выражение для СВЧ квазипотенциала (10.25), получаем значение СВЧ квазипотенциала $\Phi_{\omega H}(y)$ для случая приближения частоты СВЧ поля к резонансной электронной циклотронной частоте со стороны малых частот $\omega < \Omega$:

$$\Phi_{\omega H}(y) = \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} \approx -\frac{e^2 E_x^2(y)}{8m\omega\delta} \gg \frac{e^2 E_x^2(y)}{4m\omega^2} \quad (10.34).$$

Таким образом, при больших магнитных полях, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} > 1$, СВЧ квазипотенциал $\Phi_{\omega H}$ становится отрицательным, т. е. потенциальной “ямой”, а в резонансном случае $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \approx 1$ абсолютная величина СВЧ квазипотенциала может значительно превосходить его величину в отсутствии магнитного поля.

Лекция 11. Движение электронов в неоднородном поле СВЧ волны $\vec{E}(x,t)$ и в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}_0$ в конфигурации $\nabla \vec{E}^2(x,t) \updownarrow \vec{E}(x,t) \updownarrow \vec{e}_x \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_z$

Рассмотрим четвертую конфигурацию полей для описания движения заряженных частиц в неоднородном СВЧ поле с неоднородностью $\nabla \vec{E}^2(x,t)$ по оси OX в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}_0$, вектор которого ориентирован по оси OZ . Особенность этой конфигурации состоит в том, что градиент неоднородности электрической компоненты СВЧ поля коллинеарен вектору осциллирующего электрического поля, который коллинеарен OX , а постоянное однородное магнитное поле ориентировано по OZ , и перпендикулярно как градиенту неоднородности, так и вектору электрической компоненты СВЧ поля. Будем рассматривать слабые неоднородности СВЧ поля, когда осцилляции электрона $x(t)$ в переменном поле $E_x(x,t)$ СВЧ волны значительно меньше характерного масштаба неоднородности СВЧ поля L_x :

$$L_x = \frac{E_x(x)}{\frac{\partial E_x(x)}{\partial x}} \square X_0 = \frac{eE_x(x)}{m\omega^2} \geq x(t) = \frac{eE_x(x)}{m\omega^2} \sin \omega t \quad (11.1).$$

Будем решать уравнение движения электрона в СВЧ электрических и магнитных полях с учетом действия постоянного однородного магнитного поля. По аналогии с лекцией 5, будем рассматривать движение заряженной частицы в виде двух типов движений – быстрого движения, обусловленного движением в осциллирующем СВЧ поле с характерным временным масштабом периода поля $T=2\pi/\omega$, и медленным движением, обусловленным неоднородностью СВЧ поля, для которого движение происходит за много периодов поля, т.е. существенно медленнее.

В присутствие электрического СВЧ поля и магнитного поля $\vec{H}$ на заряженную частицу действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} \cdot [\vec{V} \times \vec{H}] \quad (11.2).$$

Электрическую компоненту неоднородного СВЧ поля и однородного постоянного магнитного поля представляем в следующих видах:

$$\vec{E}(x, z, t) = \{ E_x(x); 0; 0 \} \sin(\omega t - kz) \quad (11.3)$$

$$\vec{H}_0 = \{ 0; 0; H_{0z} \} \quad (11.4),$$

здесь x, y, z , пространственные координаты. Координата z в аргументе синуса связана с фазой распространяющейся в пространстве со скоростью света квазиплоской электромагнитной волной, при этом имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = c = \frac{\omega}{k}, \quad kc = 1 \quad (11.5).$$

При наличии неоднородности электрической компоненты СВЧ поля, из уравнения Максвелла определим осциллирующую магнитную компоненту:

$$\text{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (11.6),$$

$$\begin{aligned} \text{rot} E &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(x) \sin(\omega t - kz), & 0, & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ 0; \frac{\partial}{\partial z} [E_x(x) \sin(\omega t - kz)]; 0 \right\} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{aligned} \quad (11.7).$$

Учитывая (11.7), из (11.6) получим выражения для осциллирующей магнитной компоненты СВЧ поля в виде:

$$\begin{aligned}
E_x(x) \frac{\partial}{\partial z} [\sin(\omega t - kz)] &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{\omega y}}{\partial t} \\
-kE_x(x) \cos(\omega t - kz) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{\omega y}}{\partial t} \\
H_{\omega y} &= \frac{kc}{\omega} E_x(x) \sin(\omega t - kz) = E_x(x) \sin(\omega t - kz)
\end{aligned} \tag{11.8}.$$

Из (11.8) видно, что осциллирующая магнитная компонента поля направлена по оси OY , и в гауссовой системе равна электрической компоненте. Магнитная и электрическая компоненты осциллируют синфазно. Эта осциллирующая магнитная компонента присуща самой плоской электромагнитной волне. В данной конфигурации другие осциллирующие магнитные компоненты отсутствуют.

Выражение силы Лоренца, связанной с векторным произведением скорости электрона и магнитных полей, представим в виде:

$$-\frac{e}{c} [\vec{V} \times \vec{H}] = -\frac{e}{c} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ 0 & H_{\omega y} & H_{\omega z} \end{vmatrix} = -\frac{e}{c} \left\{ \frac{\partial y}{\partial t} H_{\omega z} - \frac{\partial z}{\partial t} H_{\omega y}; -\frac{\partial x}{\partial t} H_{\omega z}; \frac{\partial x}{\partial t} H_{\omega y} \right\} \tag{11.9}.$$

Тогда уравнения движения электрона по осям OX , OY , OZ будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{e}{m} E_x(x) \sin(\omega t) - \frac{e}{mc} \left[\frac{\partial y}{\partial t} H_{\omega z} - \frac{\partial z}{\partial t} H_{\omega y} \right] \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{e}{mc} \left(-\frac{\partial x}{\partial t} \right) H_{\omega z} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{mc} \frac{\partial x}{\partial t} H_{\omega y}
\end{aligned} \tag{11.10}.$$

В уравнениях движения (11.10) функция вида $\sin(\omega t - kz)$, описывающая распространение плоской электромагнитной волны, заменена на

осциллирующую функцию вида $\sin(\omega t)$. Это сделано потому, что в уравнениях движения переменная z является координатой электрона, а не координата постоянной фазы движущейся со скоростью света электромагнитной волны. Для установления справедливости этой операции замены аргумента $\omega t - kz$ на ωt оценим величину kz , опираясь на то, что осцилляторные смещения электрона по оси OZ малы и скорости электрона нерелятивистские:

$$kz = \frac{2\pi z}{\lambda} < \frac{2\pi x}{\lambda} < \frac{2\pi}{cT} \cdot \frac{eE_x}{m\omega^2} = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{eE_x}{m\omega^2} = \frac{eE_x}{cm\omega} \leq \frac{1}{c} \frac{\partial x}{\partial t} \ll 1 \quad (11.11).$$

Соотношение (11.11) означает, что в нерелятивистском приближении движения электрона величина $kz \ll 1$ является малой величиной по сравнению с $\omega t \gg 1$. Таким образом, не ограничивая общности рассмотрения, в аргументе функции $\sin(\omega t - kz)$ величину kz можно опустить. С учетом того, что мы рассматриваем только нерелятивистские скорости электронов, можем пренебречь третьим членом в правой части первого уравнения системы (11.10). Тогда уравнение движения электрона по оси OX будет иметь более простой вид:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{e}{m} E_x(x) \sin(\omega t) - \Omega \frac{\partial y}{\partial t} \quad (11.12),$$

где величина $\Omega = \frac{eH_{oz}}{mc}$ обозначает электронную циклотронную частоту.

Однократное интегрирование по времени (11.12) дает выражение для проекции скорости электрона на ось OX :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{e}{m\omega} E_x(x) \cos(\omega t) - \Omega y \quad (11.13).$$

Выражение (11.13) подставляем во второе уравнение системы (11.10), и тогда получаем уравнение движения электрона по оси OY в виде:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{eH_{oz}}{mc} \cdot \left[-\frac{e}{m\omega} E_x(x) \cos(\omega t) + \Omega y \right]$$

или

(11.14).

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \Omega^2 y = \frac{\Omega}{\omega} \frac{eE_x(x)}{m} \cos(\omega t)$$

Уравнение (11.14) представляет собой классическое уравнение колебаний с вынуждающей гармонической силой в правой части уравнения. Из теории колебаний хорошо известно, что общее решение неоднородного уравнения (11.14) будет состоять из суммы частного решения этого уравнения (гармонические осцилляции с характерной частотой ω внешней силы) и общего решения однородного уравнения (собственные гармонические осцилляции с частотой Ω). При наличии даже слабого затухания собственные гармонические осцилляции с частотой Ω исчезнут, и останется только частное решение неоднородного уравнения, обусловленного действием осциллирующей с частотой ω вынуждающей силы. Тогда, пренебрегая переходными процессами затухания собственных колебаний, будем искать установившееся решение уравнения (11.14) в следующем виде:

$$y(t) = Y_0 \cos(\omega t) \quad (11.15).$$

Подставляя (11.15) в (11.14), получаем алгебраическое уравнение для нахождения амплитуды колебаний Y_0 :

$$-\omega^2 Y_0 \cos(\omega t) + \Omega^2 Y_0 \cos(\omega t) = \frac{\Omega}{\omega} \frac{eE_x(x)}{m} \cos(\omega t) \quad (11.16).$$

Из (11.16) находим выражение для амплитуды осцилляций Y_0 :

$$Y_0 = \frac{\Omega}{\omega} \frac{eE_x(x)}{m(\Omega^2 - \omega^2)} = -\frac{\Omega}{\omega} \frac{eE_x(x)}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \quad (11.17).$$

Подставляя (11.17) в (11.15), получаем выражение для зависимости координаты электрона на оси OY от времени $y(t)$. Выполнив

дифференцирование по времени величины $y(t)$, получим и выражение для проекции скорости электрона на ось OY :

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{\Omega}{\omega} \frac{eE_x(x)}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \cos(\omega t) \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} &= \Omega \frac{eE_x(x)}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (11.18).$$

Выражение для проекции скорости электрона по оси OY (11.18) подставляем в исходное уравнение движения электрона по оси OX (11.10), и тогда получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(x)}{m} \sin(\omega t) - \frac{eH_{oz}}{mc} \Omega \frac{eE_x(x)}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \sin(\omega t) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(x)}{m} \sin(\omega t) - \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \end{aligned} \quad (11.19).$$

Раскладываем в ряд $E_x(x)$ вблизи произвольной точки x по малому параметру отношения величины осцилляций $x(t)$ к характерному масштабу

неоднородности L_x , т.е. $x(t)/L_x = \frac{x(t)E_x}{\frac{\partial E_x(x)}{\partial x}} \ll 1$. Тогда получаем:

$$E(x + x(t)) \approx E(x) \left[1 + x(t) \frac{1}{E(x)} \frac{\partial E(x)}{\partial x} + \dots + \frac{x^{n-1}(t)}{(n-1)! E(x)} \frac{\partial^{n-1} E(x)}{\partial x^{n-1}} + \dots \right] \quad (11.20).$$

Оставляем из ряда (11.20) только первый и второй члены разложения поля $E_x(x) + x(t) \frac{\partial E(x)}{\partial x}$ и, подставляя их в уравнение (11.19), получим следующее

упрощенное уравнение движения электрона по координате OX :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{eE_x(x)}{m} \sin(\omega t) - \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} - e \frac{x(t)}{m} \frac{\partial E_x(x)}{\partial x} \sin(\omega t) - \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \quad (11.21).$$

Рассматриваем далее движение по оси OX , как состоящее из быстрого осцилляторного X_ω движения и медленного X_g движения электрона. Быстрому движению электрона соответствует первый осциллирующий член правой части уравнения (11.21), а медленному отвечает второй член правой части этого уравнения, обусловленный пространственной производной неоднородной электрической компоненты СВЧ поля, т.е. связан с градиентом поля. Тогда для быстрого движения имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 X_\omega}{\partial t^2} = -\frac{eE_x(x)}{m} \sin(\omega t) \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \quad (11.22).$$

Медленное движение электрона будет описываться уравнением вида:

$$\frac{\partial^2 X_g}{\partial t^2} = -e \frac{X(t)}{m} \frac{\partial E_x(x)}{\partial x} \sin(\omega t) \quad (11.23).$$

Из уравнения (11.22) интегрированием дважды по времени находим выражение $X_\omega(t)$:

$$X_\omega(t) = \frac{eE_x(x)}{m\omega^2(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \sin(\omega t) \quad (11.24).$$

Переобозначаем $X_\omega(t) = X(t)$ и подставляем (11.24) в уравнение для медленного движения (11.23). После подстановки $X_\omega(t)$ в (11.23) усредняем по периоду СВЧ поля, что дает $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$, и, далее, получаем следующее приближенное уравнение, описывающее медленное движение электрона, осциллирующего в неоднородном СВЧ поле в присутствии постоянного однородного магнитного поля:

$$\frac{\partial^2 X_g}{\partial t^2} = -\frac{e^2 E_x(x)}{2m^2 \omega^2} \frac{\partial E_x(x)}{\partial x} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \quad (11.25).$$

Вводя $E_x(x)$ под знак дифференциала, получим окончательно усредненное уравнение для медленного движения электрона с учетом постоянного однородного магнитного поля в следующем виде:

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e^2 E_x^2(x)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} \right] = - \frac{\partial}{\partial x} [\Phi_{\omega H}(x)] \quad (11.26).$$

$$\Phi_{\omega H}(x) = \frac{e^2 E_x^2(x)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)}.$$

Уравнение для медленного движения электрона в СВЧ квазипотенциале $\Phi_{\omega H}(x)$ в присутствие однородного магнитного поля схоже по структуре с уравнением движения в неоднородном поле СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля, но отличается множителем $\frac{1}{(\omega^2 - \Omega^2)}$, который

связан со спецификой движения электрона в магнитном поле. Выражение для СВЧ квазипотенциала в явном виде можно записать в другом формате, удобном для последующего анализа:

$$\Phi_{\omega H}(x) = \frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \quad (11.27).$$

При малых постоянных магнитных полях, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \ll 1$, СВЧ квазипотенциал практически совпадает с СВЧ потенциалом в отсутствие магнитного поля:

$$\Phi_{\omega H}(x) = \frac{e^2 E_x^2}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx \frac{e^2 E_x^2}{4m\omega^2} \quad (11.28).$$

При больших значениях магнитного поля, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} > 1$ СВЧ квазипотенциала меняет знак и становится «отрицательным»:

$$\Phi_{\omega H}(x) = - \frac{e^2 E_x^2}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1)} \quad (11.29).$$

При очень сильных магнитных полях, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \gg 1$ величина СВЧ квазипотенциала будет отрицательна и значительно меньше по величине СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля.

$$\Phi_{\omega H}(x) = -\frac{e^2 E_x^2}{4m\omega^2} \frac{1}{\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1\right)} \approx -\frac{e^2 E_x^2}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{\frac{\Omega^2}{\omega^2}} = -\frac{e^2 E_x^2}{4m\Omega^2} \quad (11.30).$$

$$\left| -\frac{e^2 E_x^2}{4m\Omega^2} \right| \ll \frac{e^2 E_x^2}{4m\omega^2}$$

Рассмотрим СВЧ квазипотенциал вблизи электронного циклотронного резонанса, т.е. когда $\Omega \approx \omega$. Сначала рассмотрим подход к резонансу со стороны больших частот СВЧ излучения, т.е. когда выполняются соотношения:

$$\omega - \Omega = \delta > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{\omega} \approx \frac{\delta}{\Omega} \ll 1 \quad (11.31).$$

Для этого случая рассчитаем величину резонансного множителя СВЧ квазипотенциала:

$$1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2} = \frac{(\omega - \Omega)(\omega + \Omega)}{\omega^2} \approx \frac{2\omega\delta}{\omega^2} = \frac{2\delta}{\omega} \approx \frac{2\delta}{\Omega} \ll 1 \quad (11.32).$$

Подставляем (11.32) в выражение для СВЧ квазипотенциала (11.27), и получаем значение $\Phi_{\omega H}$ для случая приближения частоты СВЧ поля к резонансной электронной циклотронной частоте со стороны больших частот $\omega > \Omega$:

$$\Phi_{\omega H}(x) = \frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\omega^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)} \approx \frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\omega^2} \frac{\omega}{2\delta} = \frac{e^2 E_x^2(x)}{8m\omega\delta} \gg \frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\omega^2} \quad (11.33).$$

Из (11.33) видно, что знак СВЧ квазипотенциала положительный и соответствует знаку СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля. В то же время его величина может значительно превосходить величину СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля.

Теперь рассмотрим подход к резонансу со стороны малых частот СВЧ излучения, т.е. когда выполняются соотношения:

$$\omega - \Omega = -\delta < 0 \quad \text{и} \quad \left| \frac{\delta}{\omega} \right| \approx \left| \frac{\delta}{\Omega} \right| \ll 1 \quad (11.34).$$

Для этого случая величина резонансного множителя СВЧ квазипотенциала поменяет знак:

$$1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2} = \frac{(\omega - \Omega)(\omega + \Omega)}{\omega^2} \approx -\frac{2\delta\omega}{\omega^2} = -\frac{2\delta}{\omega} \approx -\frac{2\delta}{\Omega} < 0 \quad (11.35).$$

и $\left| \frac{2\delta}{\Omega} \right| \ll 1$

Подставляем (11.35) в выражение для СВЧ квазипотенциала (11.27) и получаем выражение СВЧ квазипотенциала $\Phi_{\omega H}$ для случая приближения частоты СВЧ поля к резонансной электронной циклотронной частоте со стороны малых частот $\omega < \Omega$:

$$\Phi_{\omega H}(x) = \frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx -\frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\omega^2 \frac{2\delta}{\omega}} = -\frac{e^2 E_x^2(x)}{8m\omega\delta} \quad (11.36).$$

и $\left| \frac{e^2 E_x^2(x)}{8m\omega\delta} \right| \gg \frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\omega^2}$

Из (11.36) видно, что для этого резонансного случая абсолютная величина СВЧ квазипотенциала может значительно превосходить значение СВЧ квазипотенциала в отсутствии магнитного поля, но его знак отрицательный и противоположен знаку обычного СВЧ квазипотенциала.

Таким образом, при больших магнитных полях, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} > 1$, СВЧ квазипотенциала меняет знак и становится отрицательным, а в резонансе $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \approx 1$ абсолютная величина СВЧ квазипотенциала может значительно превосходить СВЧ квазипотенциал в отсутствии магнитного поля, а его знак будет зависеть от того, как происходит приближение к резонансу.

Для определения характера медленного движения осциллирующего в неоднородном СВЧ электрона в присутствии постоянного однородного магнитного поля при различных соотношениях частоты СВЧ поля и ЭЦЧ, найдем первый интеграл движения из уравнения (11.26) путем умножения левой и правой частей на скорость медленного движения электрона $\frac{\partial x}{\partial t}$ по координате OX :

$$m \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) = - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\omega^2 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \right] \quad (11.37),$$

далее, переходя в левой и правой частях к полным производным по времени, получаем:

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial x}{\partial t} \right]^2 = - \frac{d}{dt} \left[\frac{e^2 E^2(x)}{4m\omega^2 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \right] \quad (11.38).$$

Представляя производную координаты электрона по времени как скорость медленного движения электрона $\frac{\partial x}{\partial t} = V(x)$ и интегрируя (11.38) по времени, получим выражение, эквивалентное закону сохранения энергии при движении электрона в поле СВЧ квазипотенциала в присутствии однородного магнитного поля $\vec{H}_0 \parallel \vec{e}_z$:

$$\frac{m}{2} V^2(x) + \left[\frac{e^2 E^2(x)}{4m\omega^2 (1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \right] = \text{const} \quad (11.39).$$

При малых значениях магнитного поля $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \ll 1$, получаем известное выражение для сохранения суммы энергии медленного и осцилляторного движения электрона в неоднородном СВЧ поле. Из (11.39) следует, что электрон при его движении из области сильного СВЧ поля, там, где $E^2(x)$

велико, в область слабого СВЧ поля, там, где $\vec{E}^2(x)$ мало, приобретает энергию направленного движения против градиента $\nabla \vec{E}^2(x)$. Это означает, что величина $\frac{m}{2}V^2(x)$, соответствующая кинетической энергии электрона, при таком медленном движении возрастает на величину уменьшения $\vec{E}^2(x)$.

При больших значениях магнитного поля, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \gg 1$ выражение (11.39) преобразуется к виду:

$$\frac{m}{2}V^2(x) - \left[\frac{e^2 E_x^2(x)}{4m\Omega^2} \right] = \text{const} \quad (11.40).$$

Это означает, что в тех областях пространства, где величина СВЧ квазипотенциала велика, то там кинетическая энергия электрона также велика. В тех же областях пространства, где СВЧ квазипотенциал мал, то там мала и кинетическая энергия электрона. В сильном магнитном поле СВЧ квазипотенциал представляет собой «потенциальную яму», втягивающую электроны в область больших значений интенсивности СВЧ излучения, но при этом абсолютная величина СВЧ квазипотенциала мала вследствие того, что $\Omega^2 \ll \omega^2$.

Для резонансных случаев движения электрона в неоднородном СВЧ поле и постоянном однородном магнитном поле, т.е. при $\Omega \approx \omega$, закон сохранения энергии медленного и осцилляторного движения электрона существенно зависит от того, в каком соотношении находятся частоты Ω и ω . При $\omega - \Omega = \delta > 0$ и $\frac{\delta}{\omega} \approx \frac{\delta}{\Omega} \ll 1$ движение электрона подчиняется следующему закону:

$$\frac{m}{2}V^2(x) + \frac{e^2 E_x^2(x)}{8m\omega\delta} = \text{const} \quad (11.41).$$

При $\omega - \Omega = -\delta < 0$ и $\left| \frac{\delta}{\omega} \right| \approx \left| \frac{\delta}{\Omega} \right| \ll 1$ движение электрона подчиняется

другому закону:

$$\frac{m}{2} V^2(x) - \frac{e^2 E_x^2(x)}{8m\omega\delta} = \text{const} \quad (11.42).$$

Из (11.41) видно, что закон медленного движения электрона в СВЧ квазипотенциале вблизи резонанса, но при СВЧ частотах немного превышающих частоту электронного циклотронного резонанса, по характеру такой же, как и в случае отсутствия магнитного поля: электрон «выдавливается» из области с большим значением СВЧ квазипотенциала в область с малым значением СВЧ квазипотенциала. При этом электрон набирает кинетическую энергию.

В случае, когда частота СВЧ поля находится вблизи резонансного значения и близка к частоте электронного циклотронного резонанса, но немного ниже его значения (11.42), характер движения электрона существенно изменяется: осциллирующий электрон «втягивается» в область с большим отрицательным значением СВЧ квазипотенциала (в потенциальную яму). При таком движении электрона из области с малым абсолютным значением отрицательного СВЧ квазипотенциала в область с большим абсолютным значением отрицательного СВЧ квазипотенциала электрон набирает кинетическую энергию.

Лекция 12. Движение электронов в неоднородном поле $\vec{E}(z,t)$ СВЧ волны и в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}_0$ в конфигурации

$$\nabla \vec{E}^2(z,t) \updownarrow \vec{e}_z \perp \vec{E}(z,t) \updownarrow \vec{e}_x \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_y$$

Рассмотрим следующий случай конфигурации полей, когда неоднородное СВЧ поле с произвольной неоднородностью по оси OZ вида $\vec{E}(z,t)$ коллинеарно оси OX . Будем рассматривать случай, при котором градиент неоднородности СВЧ поля $\nabla \vec{E}^2(z,t)$ ортогонален вектору электрической компоненты $\vec{E}(z,t)$. При этом электрическая компонента СВЧ поля коллинеарна оси OX . Будем рассматривать также слабо неоднородные СВЧ поля, когда пространственные осцилляции электрона $x(t)$ по оси OX и $z(t)$ по оси OZ в СВЧ поле значительно меньше характерного масштаба неоднородности СВЧ поля L_z :

$$L_z = \frac{E_x(z)}{\frac{\partial E_x(z)}{\partial z}} \square X_0 = \frac{eE_x(z)}{m\omega^2} \geq x(t) = \frac{eE_x(z)}{m\omega^2} \sin \omega t \quad (12.1).$$

$$L_z \square Z_0 \geq z(t) = Z_0 \sin \omega t$$

Рассматриваем движение электрона в поле СВЧ волны в присутствии постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$, ориентированного перпендикулярно градиенту неоднородности СВЧ поля $\nabla \vec{E}^2(z,t) \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_y$. В присутствие электрического и магнитных компонент СВЧ волны и постоянного однородного магнитного поля на электрон действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} \cdot [\vec{V} \times \vec{H}] \quad (12.2).$$

Электрическую компоненту неоднородного СВЧ поля и однородного постоянного магнитного поля представляем в следующих видах:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \{ E_x(z) \sin(\omega t - kz); 0; 0 \} \quad (12.3),$$

$$\vec{H}_0 = \{ 0; H_{oy}; 0 \} \quad (12.4).$$

Поскольку СВЧ квазиплоская волна с волновым вектором k и круговой частотой ω неоднородна в пространстве по оси OZ , то, в соответствии с уравнением Максвелла должна появиться магнитная компонента поля, осциллирующая с той же самой частотой ω :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (12.5).$$

Рассчитаем осциллирующие магнитные компоненты неоднородного СВЧ поля, записав уравнение Максвелла в матричном виде, и получим результат в виде компонент вектора:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(z) \cdot \sin(\omega t - kz) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \left\{ 0; \frac{\partial}{\partial z} [E_x(z) \cdot \sin(\omega t - kz)]; 0 \right\} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{aligned} \quad (12.6).$$

Приравняем компоненты вектора $\text{rot} \vec{E}$, вычисленные в (12.6), производной по времени магнитной компоненты правой части уравнения Максвелла (12.5):

$$\frac{\partial}{\partial z} [E_x(z) \cdot \sin(\omega t - kz)] = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{\omega y}}{\partial t} \quad (12.7).$$

Здесь индекс « ωy » у магнитной компоненты $H_{\omega y}$ означает, что это осциллирующая с частотой ω проекция магнитного СВЧ поля на ось OY . Проведем операцию дифференцирования по координате Z в явном виде в левой части уравнения (12.7), тогда получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \sin(\omega t - kz) - kE_x(z) \cos(\omega t - kz) = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{\omega y}}{\partial t} \quad (12.8).$$

Проведем далее интегрирование по времени уравнения (12.8), и тогда получим в явном виде выражение для магнитной компоненты $H_{\omega y}$ неоднородного СВЧ поля, осциллирующей с частотой ω :

$$H_{\omega y} = \frac{kc}{\omega} E_x(z) \sin(\omega t - kz) + \frac{c}{\omega} \cos(\omega t - kz) \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \quad (12.9).$$

Так как $\frac{kc}{\omega} = 1$ для электромагнитной волны в вакууме, то из (12.9) видно, что магнитная компонента $H_{\omega y}$ содержит две части: первая часть осциллирует синхронно с электрической компонентой СВЧ поля, и эта компонента присуща плоской электромагнитной волне вне зависимости от характера неоднородности СВЧ поля. Вторая часть также является осциллирующей с частотой ω , но сдвинута по фазе на $\pi/2$ относительно фазы электрической компоненты, и эта магнитная компонента связана с неоднородностью СВЧ поля. Таким образом, формула (12.9) определяет осциллирующие магнитные компоненты СВЧ поля, а выражение (12.4) задает постоянное однородное магнитное поле.

Поскольку теперь определены полностью осциллирующие магнитные поля, а постоянное однородное магнитное поле H_{oy} задано изначально компонентой по оси OY , то можно рассчитать компоненты силы Лоренца, обусловленные магнитными полями:

$$\begin{aligned} -\frac{e}{c} [\vec{V} \times \vec{H}] &= -\frac{e}{c} \begin{vmatrix} \vec{e}_x, & \vec{e}_y, & \vec{e}_z \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ 0 & H_{oy} + H_{\omega y} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{e}{c} \left(-\frac{\partial z}{\partial t} (H_{oy} + H_{\omega y}); 0; \frac{\partial x}{\partial t} (H_{oy} + H_{\omega y}) \right) \end{aligned} \quad (12.10).$$

Учитывая (12.10), из общего выражения для силы Лоренца (12.2) получим следующую систему уравнений, описывающих движения электрона по осям OX, OY, OZ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(z)}{m} \sin(\omega t - kz) - \frac{e}{mc} \left\{ -\frac{\partial z}{\partial t} H_{oy} - \frac{\partial z}{\partial t} H_{\omega y} \right\} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \left(-\frac{e}{mc} \right) \frac{\partial x}{\partial t} [H_{oy} + H_{\omega y}]\end{aligned}\quad (12.11).$$

Подставляя в (12.11) в явном виде выражение для магнитных компонент (12.9), и обозначая $\frac{eH_{oy}}{mc} = \Omega$ (электронная циклотронная частота), получим следующую систему уравнений, описывающую движение электрона в заданной конфигурации полей:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(z)}{m} \sin(\omega t - kz) + \frac{eH_{oy}}{mc} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{e}{m\omega} \frac{\partial z}{\partial t} \cos(\omega t - kz) \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} + \\ &+ \frac{e}{mc} \frac{\partial z}{\partial t} E_x(z) \sin(\omega t - kz) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{mc} \frac{\partial x}{\partial t} \left[H_{oy} + E_x(z) \sin(\omega t - kz) + \frac{c}{\omega} \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \cos(\omega t - kz) \right]\end{aligned}\quad (12.12)$$

Упростим уравнения (12.12) и заменим аргумент $(\omega t - kz)$ в осциллирующих функциях на ωt . Для установления справедливости этой операции оценим величину kz из масштаба характерного смещения электрона, имея в виду, что осцилляторные смещения электрона по оси OZ не больше, чем величина максимального смещения электрона по оси OX , которая определяется

амплитудой осцилляции $\frac{eE(z)}{m\omega^2}$:

$$kz = \frac{2\pi z}{\lambda} < \frac{2\pi x}{\lambda} \leq \frac{2\pi}{cT} \frac{eE(z)}{m\omega^2} = \frac{\omega}{c} \frac{eE(z)}{m\omega^2} = \frac{eE(z)}{cm\omega} \ll 1.$$

Это соотношение означает, что для электрона выражение kz в фазе волны представляет собой отношение амплитуды осцилляторной скорости электрона к скорости света c , и это отношение в нерелятивистском приближении является весьма малой величиной $kz \ll 1$, которой мы можем пренебречь по сравнению с величиной $\omega t \gg 1$.

Проведем дальнейшее упрощение системы уравнений (12.12), рассматривая движения электронов только с нерелятивистскими скоростями:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial x}{\partial t} \ll 1; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial y}{\partial t} \ll 1; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial z}{\partial t} \ll 1 \quad (12.13).$$

На основании (12.13) в первом уравнении системы (12.12) можем пренебречь четвертым членом, содержащим множитель $\frac{1}{c} \frac{\partial z}{\partial t} \ll 1$. Также опустим и третий член первого уравнения (12.12), содержащий пространственную производную $\frac{\partial E_x(z)}{\partial z}$, так как отношение этого члена к первому будет малым

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial z(t)}{\partial t} \frac{1}{E_x(z)} \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \approx z(t) \frac{1}{E_x(z)} \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \leq \frac{x(t)}{L_z} \ll 1, \quad \text{что соответствует}$$

условию слабой неоднородности СВЧ поля (12.1). Тогда, из (12.12) получим более простую систему уравнений, описывающую движение электрона в неоднородном СВЧ поле и в постоянном однородном магнитном поле:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(z)}{m} \sin(\omega t) + \Omega \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{mc} \frac{\partial x}{\partial t} \left[H_{oy} + E_x(z) \sin(\omega t) + \frac{c}{\omega} \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \cos(\omega t) \right] \end{aligned} \quad (12.14).$$

Проведя интегрирование по времени первого уравнения системы (12.14) получим приближенное выражение для скорости электрона по оси OX в следующем виде:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{eE_x(z)}{m\omega} \cos(\omega t) + \Omega z \quad (12.15).$$

Подставляя выражение (12.15) в третье уравнение системы (12.14), получим уравнение, описывающее движение электрона по оси OZ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{mc} \left[\frac{eE_x(z)}{m\omega} \cos(\omega t) + \Omega z \right] \left[H_{oy} + E_x(z) \sin(\omega t) + \frac{c}{\omega} \cos(\omega t) \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\Omega \frac{eE_x(z)}{m\omega} \cos(\omega t) - \Omega^2 z - \frac{eE_x(z)}{m\omega c} \frac{eE_x(z)}{m} \cos(\omega t) \sin(\omega t) - \\ &- \frac{e}{mc} \Omega z E_x(z) \sin(\omega t) - \frac{e}{m\omega} \frac{eE_x(z)}{m\omega} \cos^2(\omega t) \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} - \\ &- \frac{e}{mc} \Omega z \frac{c}{\omega} \cos(\omega t) \frac{\partial E_x(z)}{\partial z}\end{aligned}\quad (12.16).$$

В правой части уравнения (12.16) имеются члены, содержащие такой малый релятивистский параметр как отношение скорости электрона к скорости света: это третий и четвертый члены, которыми мы пренебрежем по сравнению с другими членами в правой части этого уравнения. Тогда получим следующее более упрощенное уравнение, описывающее движение электрона по оси OZ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\Omega \frac{eE_x(z)}{m\omega} \cos(\omega t) - \Omega^2 z - \\ &- \frac{e}{m\omega} \frac{eE_x(z)}{m\omega} \cos^2(\omega t) \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} - \frac{e}{mc} \Omega z \frac{c}{\omega} \cos(\omega t) \frac{\partial E_x(z)}{\partial z}\end{aligned}\quad (12.17).$$

В уравнении (12.17) имеются члены, описывающие быстрые процессы, происходящие с характерной частотой ω , и медленные процессы, связанные с градиентом СВЧ поля. Эти процессы будем описывать отдельно, представив перемещение электрона по оси OZ в виде суммы двух движений – быстрого и медленного $z(t) = z_\omega(t) + z_g(t)$. Тогда уравнение (12.17) преобразуется в два уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z_\omega(t)}{\partial t^2} + \Omega^2 z_\omega &= -\Omega \frac{eE_x(z)}{m\omega} \cos(\omega t) \\ \frac{\partial^2 z_g(t)}{\partial t^2} &= -\frac{e}{m\omega} \frac{eE_x(z)}{m\omega} \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \cos^2(\omega t) - \frac{e}{mc} \Omega z_\omega \frac{c}{\omega} \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \cos(\omega t)\end{aligned}\quad (12.18)$$

Первое уравнение (12.18) представляет собой каноническое уравнение осциллятора с вынуждающей силой в правой части этого уравнения. Решение этого уравнения состоит из общего решения однородного уравнения, для которого правая часть равна нулю, и частного решения неоднородного уравнения с правой частью в виде осциллирующей функции $-\Omega \frac{eE_x(z)}{m\omega} \cos(\omega t)$. При наличии даже слабого «затухания» амплитуда случайно возникших собственных колебаний осциллятора должна уменьшиться до нуля за несколько осцилляций. В то время как частное решение первого уравнения системы (12.18) с вынуждающей силой $-\Omega \frac{eE_x(z)}{m\omega} \cos(\omega t)$ является незатухающим, и оно будет основным решением этого уравнения. Будем искать решение этого уравнения в виде осциллирующей функции, синхронизованной с вынуждающей силой:

$$z_\omega(t) = Z_0 \cos(\omega t) \quad (12.19).$$

Подставляя (12.19) в первое уравнение (12.18) и проведя вычисления, получим алгебраическое уравнение, из которого находим амплитуду вынужденных осцилляций Z_0 :

$$\begin{aligned} -\omega^2 Z_0 \cos(\omega t) + \Omega^2 Z_0 \cos(\omega t) &= -\Omega \frac{eE_x(z)}{m\omega} \cos(\omega t) \\ Z_0 &= -\Omega \frac{eE_x(z)}{m\omega} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} = \frac{\Omega}{\omega} \frac{eE_x(z)}{m} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \end{aligned} \quad (12.20).$$

Из выражений (12.20) и (12.19), получаем выражение для проекции координаты «быстрого» движения электрона на ось OZ :

$$z_\omega(t) = \frac{\Omega}{\omega} \frac{eE_x(z)}{m} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\omega t) \quad (12.21).$$

Подставляя выражение (12.21) вместо $z(t)$ во второе уравнение (12.18), описывающее медленное движение электрона по оси OZ , получаем:

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{e^2 E_x(z)}{m\omega^2} \cos^2(\omega t) \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \frac{e^2 E_x(z)}{m} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \cos^2(\omega t) \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \quad (12.22).$$

Усреднение (12.22) по периоду осцилляций дает $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$. Тогда получим усредненное уравнение, описывающее медленное движение электрона по оси OZ , обусловленное неоднородностью СВЧ поля:

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{e^2 E_x(z)}{2m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} = -\frac{e^2 E_x(z)}{2m(\omega^2 - \Omega^2)} \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \quad (12.23).$$

Вводя под знак дифференциала выражение $\frac{e^2 E_x(z)}{2m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})}$, получим

модифицированное уравнение для медленного движения электрона по оси OZ :

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} \right] \quad (12.24).$$

Умножая (12.24) на скорость медленного движения электрона $\frac{\partial z}{\partial t}$, переходим от частных производных к полным производным по времени и получаем первый интеграл для медленного движения электрона:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \right] \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \\ \frac{d}{dt} m \frac{1}{2} \left[\frac{\partial z}{\partial t} \right]^2 &= -\frac{d}{dt} \left[\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \right] \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \\ \frac{mV_z^2}{2} + \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} &\equiv \frac{mV_z^2}{2} + \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} = const \end{aligned} \quad (12.25).$$

Таким образом, в такой конфигурации полей $\nabla \vec{E}^2(z,t) \updownarrow \vec{e}_z \perp \vec{E}(z,t) \updownarrow \vec{e}_x \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_y$, когда электрическая компонента СВЧ поля $\vec{E}(z,t)$ коллинеарна оси OX , СВЧ поле неоднородно по оси OZ , постоянное однородное магнитное поле $\vec{H}_0$, ориентировано по оси OY , тогда формируется СВЧ квазипотенциал $\Phi_{\omega H}(z)$, градиент которого определяет силу, действующую на заряженные частицы независимо от знака заряда и перпендикулярную постоянному магнитному полю. СВЧ квазипотенциал $\Phi_{\omega H}(z)$ представляет собой выражение вида:

$$\Phi_{\omega H}(z) = \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} = \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} \quad (12.26).$$

При малых постоянных магнитных полях, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \ll 1$, СВЧ квазипотенциал в магнитном поле практически совпадает с СВЧ квазипотенциалом в отсутствие магнитного поля:

$$\Phi_{\omega H}(z) = \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \quad (12.27).$$

При больших значениях магнитного поля, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} > 1$ СВЧ квазипотенциал меняет знак и становится отрицательным:

$$\Phi_{\omega H}(z) = \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \frac{1}{(\omega^2 - \Omega^2)} = -\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m(\Omega^2 - \omega^2)} = -\left| \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} \right| \quad (12.28).$$

При очень сильных магнитных полях, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \gg 1$, СВЧ квазипотенциал $\Phi_{\omega H}(z)$ будет отрицательным, но при этом по величине значительно меньше СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля.

$$\Phi_{\omega H}(z) = -\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \frac{1}{(\Omega^2 - \omega^2)} \approx -\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\Omega^2}; \quad \left| -\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\Omega^2} \right| \ll \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \quad (12.29).$$

Рассмотрим поведение СВЧ квазипотенциала вблизи электронного циклотронного резонанса, т.е. когда $\Omega \approx \omega$. Сначала подойдем к резонансу со стороны больших частот СВЧ излучения:

$$\omega - \Omega = \delta > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{\omega} \approx \frac{\delta}{\Omega} \ll 1 \quad (12.30).$$

Для этого случая рассчитаем величину резонансного множителя СВЧ квазипотенциала:

$$1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2} = \frac{(\omega - \Omega)(\omega + \Omega)}{\omega^2} \approx \frac{2\delta\omega}{\omega^2} = \frac{2\delta}{\omega} \approx \frac{2\delta}{\Omega} \ll 1 \quad (12.31).$$

Подставляем (12.31) в выражение для СВЧ квазипотенциала (12.26), и получаем значение $\Phi_{\omega H}(z)$ для случая приближения частоты СВЧ поля к резонансной ЭЦЧ со стороны больших частот $\omega \geq \Omega$:

$$\Phi_{\omega H}(z) = \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \frac{2\delta}{\omega} = \frac{e^2 E_x^2(z)}{8m\omega\delta} \gg \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \quad (12.32).$$

Из (12.32) видно, что знак СВЧ квазипотенциала положительный, и соответствует знаку СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля. В то же время его величина может значительно превосходить величину СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля.

Теперь рассмотрим подход к резонансу со стороны малых частот СВЧ излучения, т.е. когда выполняются соотношения:

$$\omega - \Omega = -\delta < 0 \quad \text{и} \quad \left| \frac{\delta}{\omega} \right| \approx \left| \frac{\delta}{\Omega} \right| \ll 1 \quad (12.33).$$

Для этого случая величина резонансного множителя СВЧ квазипотенциала поменяет знак:

$$1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2} = \frac{(\omega - \Omega)(\omega + \Omega)}{\omega^2} \approx -\frac{2\delta\omega}{\omega^2} = -\frac{2\delta}{\omega} \approx -\frac{2\delta}{\Omega} < 0 \quad (12.34).$$

и $\left| \frac{2\delta}{\Omega} \right| \ll 1$

Подставляем (12.34) в выражение для СВЧ квазипотенциала (12.26), и получаем $\Phi_{\omega H}(z)$ для случая приближения частоты СВЧ поля к резонансной электронной циклотронной частоте со стороны малых частот $\omega \leq \Omega$:

$$\Phi_{\omega H}(z) = \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx - \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2 \cdot \frac{2\delta}{\omega}} = - \frac{e^2 E_x^2(z)}{8m\omega\delta} \quad (12.35).$$

и $\left| - \frac{e^2 E_x^2(z)}{8m\omega\delta} \right| \gg \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2}$

Из (12.35) видно, что для этого резонансного случая абсолютная величина СВЧ квазипотенциала может значительно превосходить значение СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля, а его знак отрицательный.

Таким образом, в магнитных полях, для которых выполняется условие $\frac{\Omega^2}{\omega^2} < 1$, реализуется правило сохранения суммы кинетической энергии направленного движения электрона и осцилляторной энергии электрона:

$$\frac{mV_z^2}{2} + \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} = \text{const} \quad (12.36).$$

Это уравнение (12.36) означает, что в неоднородном СВЧ поле в присутствии постоянного однородного магнитного поля (в условиях $\frac{\Omega^2}{\omega^2} < 1$) электрон движется из области высокого значения осцилляторной энергии в область с более низким значением осцилляторной энергии. При этом в процессе этого движения электрон приобретает кинетическую энергию направленного движения на величину уменьшения его осцилляторной энергии.

При больших магнитных полях, когда $\Omega^2 > \omega^2$, СВЧ квазипотенциал меняет знак и становится «отрицательным» $\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} < 0$, т.е. формируется СВЧ квазипотенциальная «яма». При этом закон сохранения энергии электрона будет представляться в виде сохранения суммы энергии

направленного движения электрона и отрицательной энергии СВЧ квазипотенциала:

$$\frac{mV_z^2}{2} - \left| \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} \right| = \text{const} \quad (12.37).$$

Уравнение движения электрона (12.24) с силой в правой части в виде градиента квазипотенциала также изменит знак в правой части:

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = + \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \right] \equiv + \frac{\partial}{\partial z} \left| \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} \right| \quad (12.38).$$

Выражени (12.37) и уравнение (12.38) означают, что в неоднородном СВЧ поле в присутствии постоянного однородного магнитного поля (в условиях $(\Omega^2 / \omega^2) > 1$) электрон движется по склону квазипотенциальной «ямы» из области низкого абсолютного значения осцилляторной энергии в область с более высоким абсолютным значением осцилляторной энергии. При этом в процессе этого движения электрон приобретает кинетическую энергию направленного движения.

В резонансном случае $(\Omega^2 / \omega^2) \approx 1$ абсолютная величина СВЧ квазипотенциала может значительно превосходить СВЧ квазипотенциал в отсутствие магнитного поля, но его знак будет зависеть от того как происходит приближение к резонансной частоте. При подходе к резонансу со стороны высоких частот СВЧ излучения $(\frac{\omega}{\Omega} > 1)$ СВЧ квазипотенциал имеет положительный знак, и при приближении к резонансу его величина возрастает. При переходе через резонанс $(\frac{\omega}{\Omega} < 1)$, СВЧ квазипотенциал меняет знак и становится отрицательным, т.е. для электрона формируется квазипотенциальная яма, и характер его движения в такой конфигурации полей существенно меняется.

Лекция 13. Движение электронов в неоднородном поле СВЧ волны и в постоянном однородном магнитном поле в конфигурации

$$\nabla \vec{E}^2(z,t) \updownarrow \vec{e}_z \perp \vec{E}(z,t) \updownarrow \vec{e}_x \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_z$$

Рассмотрим шестой случай, когда СВЧ поле ориентировано по оси OX $\vec{E}(z,t) \updownarrow \vec{e}_x$, а градиент неоднородности СВЧ поля $\nabla \vec{E}_x^2(z,t)$ направлен по оси OZ , т.е. коллинеарен волновому вектору $\vec{k}$. Будем рассматривать такие случаи неоднородности СВЧ поля, когда осцилляции электрона $z(t)$, $x(t)$ по осям OZ и OX соответственно значительно меньше характерного масштаба неоднородности СВЧ поля L_z :

$$z(t) < x(t) \ll L_z = \frac{E_x(z)}{\frac{\partial E_x(z)}{\partial z}} \quad (13.1).$$

Рассматриваем движение электрона в электрическом и магнитном поле СВЧ волны в присутствии внешнего постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$, ориентированного перпендикулярно электрической компоненте СВЧ поля и параллельно волновому вектору $\vec{k}$. В этих условиях на электрон с зарядом $-e$ действует сила Лоренца:

$$\vec{F} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} [\vec{V} \times \vec{H}] \quad (13.2),$$

здесь c – скорость света.

Электрическую компоненту неоднородного СВЧ поля $\vec{E}(z,t)$ и постоянное однородное магнитное поле $\vec{H}_0$ представляем в виде:

$$\vec{E}(z,t) = \{ E_x(z) ; 0 ; 0 \} \sin(\omega t - kz) \quad (13.3),$$

$$\vec{H}_0 = \{ 0 ; 0 ; H_{oz} \} \quad (13.4).$$

Поскольку осциллирующее с частотой ω СВЧ поле неоднородно в пространстве, то, в соответствии с уравнением Максвелла должно появиться и осциллирующее с той же самой частотой ω и магнитная компонента поля:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (13.5).$$

Рассчитаем осциллирующие магнитные компоненты неоднородного СВЧ поля, расписав уравнение Максвелла в виде компонент вектора:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x, & \vec{e}_y, & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} \sin(\omega t - kz) = \\ &= \left\{ 0 ; \frac{\partial}{\partial z} [E_x(z) \sin(\omega t - kz)] ; 0 \right\} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{aligned} \quad (13.6).$$

Приравняем компоненту вектора $\text{rot } \vec{E}$ (13.6) производной по времени осциллирующей с частотой ω магнитной компоненте $H_{\omega y}$, осциллирующей по оси OY :

$$\frac{\partial}{\partial z} [E_x(z) \sin(\omega t - kz)] = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{\omega y}}{\partial t} \quad (13.7).$$

Проведем операцию дифференцирования по координате z в явном виде в левой части уравнения (13.7), тогда получим следующие уравнения:

$$\sin(\omega t - kz) \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} - k E_x(z) \cos(\omega t - kz) = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_{\omega y}}{\partial t} \quad (13.8).$$

Проведем теперь операцию интегрирования по времени уравнения (13.8), тогда получим в явном виде выражение для магнитных компонент неоднородного СВЧ поля:

$$H_{\omega y} = \frac{kc}{\omega} E_x(z) \sin(\omega t - kz) + \frac{c}{\omega} \cos(\omega t - kz) \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \quad (13.9).$$

Так как $\frac{kC}{\omega}=1$ для плоской электромагнитной волны в вакууме, то из (13.9) видно, что магнитная компонента $H_{\omega y}$ содержит две части. Первая часть представляет собой компоненту $E_x(z)\sin(\omega t - kz)$, осциллирующую синхронно с электрической компонентой СВЧ поля. Эта магнитная компонента присуща электромагнитной волне вне зависимости от характера неоднородности СВЧ поля. Вторая часть $\frac{c}{\omega}\cos(\omega t - kz)\frac{\partial E_x(z)}{\partial z}$ также является функцией, осциллирующей с частотой ω , но она сдвинута по фазе на $\pi/2$ относительно осцилляций электрической СВЧ компоненты. Эта магнитная компонента связана с неоднородным характером электрической компоненты СВЧ поля. Таким образом, выражение (13.9) определяет две осциллирующие магнитные компоненты СВЧ поля, а формула (13.4) постоянное однородное магнитное поле.

Поскольку теперь определены полностью все компоненты переменных и постоянного магнитных полей, можно рассчитать компоненты силы Лоренца, обусловленные магнитными полями, в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 -\frac{e}{c}[\vec{V} \times \vec{H}] &= -\frac{e}{c} \begin{vmatrix} \vec{e}_x, & \vec{e}_y, & \vec{e}_z \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ 0 & H_{\omega y} & H_{\omega z} \end{vmatrix} = \\
 &= -\frac{e}{c} \left\{ \frac{\partial y}{\partial t} H_{\omega z} - \frac{\partial z}{\partial t} H_{\omega y}; \quad -\frac{\partial x}{\partial t} H_{\omega z} ; \quad \frac{\partial x}{\partial t} H_{\omega y} \right\}
 \end{aligned} \tag{13.10}.$$

Учитывая (13.10), (13.9) и общее выражение для силы Лоренца (13.2), получим следующую систему уравнений, описывающих движения электрона по осям OX, OY, OZ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(z)}{m} \sin(\omega t - kz) - \frac{e}{mc} \left\{ \frac{\partial y}{\partial t} H_{oz} - \frac{\partial z}{\partial t} H_{oy} \right\} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{e}{mc} \frac{\partial x}{\partial t} H_{oz} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \left(-\frac{e}{mc}\right) \frac{\partial x}{\partial t} H_{oy}
\end{aligned} \tag{13.11}.$$

Подставляя в (13.11) в явном виде выражение для магнитных компонент (13.9), оставим в аргументе гармонических функций только временную часть ωt . Для установления справедливости этой операции сделаем оценку:

$$kz = \frac{2\pi z}{\lambda} < \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT} \frac{eE}{m\omega^2} = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{eE}{m\omega^2} = \frac{eE}{cm\omega} \ll 1.$$

Это соотношение означает, что выражение kz представляет собой в нерелятивистском приближении отношение осцилляторной скорости электрона к скорости света. В нашем случае для осциллирующего электрона величина kz является чрезвычайно малой величиной, которой мы можем пренебречь по сравнению с величиной $\omega t \gg 1$. Таким образом, в аргументе функций $\sin(\omega t - kz)$ и $\cos(\omega t - kz)$ величину kz можно положить равной

нулю. Далее, обозначая $\frac{eH_{oy}}{mc} = \Omega$, получим из (13.11) следующую систему

уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(z)}{m} \sin(\omega t) - \Omega \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{e}{m\omega} \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \cos(\omega t) \\
&+ \frac{e}{mc} \frac{\partial z}{\partial t} E_x(z) \sin(\omega t) \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \Omega \frac{\partial x}{\partial t} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{mc} \frac{\partial x}{\partial t} E_x(z) \sin(\omega t) - \frac{e}{m\omega} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \cos(\omega t)
\end{aligned} \tag{13.12}$$

Проведем упрощение первого уравнения системы уравнений (13.12), опираясь на ограничение рассмотрения движения электронов с нерелятивистскими скоростями:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial x}{\partial t} \ll 1 ; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial y}{\partial t} \ll 1; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial z}{\partial t} \ll 1 \quad (13.13).$$

Основываясь на нерелятивистском характере движения электрона, в первом уравнении системы уравнений (13.12) можем пренебречь четвертым членом, содержащим множитель $\frac{1}{c} \frac{\partial z}{\partial t}$. Опираясь на условия (13.1), также можно опустить и третий член в правой части первого уравнения, который мал в сравнении с первым членом. Тогда, получим существенно упрощенную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(z)}{m} \sin(\omega t) - \Omega \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \Omega \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{m\omega} \frac{\partial x}{\partial t} \cos(\omega t - kz) \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \end{aligned} \quad (13.14).$$

Проведя интегрирование по времени первого уравнения системы (13.14) получим приближенное выражение для скорости электрона по оси OX в следующем виде:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{eE_x(z)}{m\omega} \cos(\omega t) - \Omega y \quad (13.15).$$

Подставляя выражение для скорости электрона по оси OX (13.15) во второе уравнение системы (13.14), получим следующее уравнение, описывающее движение электрона по оси OY :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \Omega^2 y = \Omega \frac{eE_x(z)}{m\omega} \cos(\omega t) \quad (13.16).$$

Уравнение (13.16) представляет собой каноническое уравнение осциллятора с вынуждающей силой в правой части уравнения. Будем считать вынуждающую силу практически постоянной на масштабах осцилляций электрона вдоль оси OY . Из теории колебаний известно, что установившееся решение этого уравнения будет иметь следующий вид:

$$y(t) = Y_0 \cos(\omega t) \quad (13.17).$$

Подставляя (13.17) в уравнение (13.16) и проведя вычисления, получим алгебраическое уравнение, из которого находим амплитуду установившегося решения Y_0 :

$$\begin{aligned} -\omega^2 Y_0 \cos(\omega t) + \Omega^2 Y_0 \cos(\omega t) &= \Omega \frac{eE_x(z)}{m\omega} \cos(\omega t) \\ Y_0 &= \Omega \frac{eE_x(z)}{m\omega} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} = \frac{\Omega}{\omega} \frac{eE_x(z)}{m} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} \end{aligned} \quad (13.18).$$

Из (13.18) и (13.17) получаем выражения для проекции координаты и скорости электрона на ось OY :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\Omega}{\omega} \frac{eE_x(z)}{m} \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -\frac{eE_x(z)}{m} \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (13.19).$$

Подставляя далее выражение $\frac{\partial y}{\partial t}$ из (13.19) в первое уравнение системы (13.14), описывающее движение электрона по оси OX , получаем систему уравнений (13.14) в следующем упрощенном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{eE_x(z)}{m} \sin(\omega t) - \frac{eE_x(z)}{m} \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\omega t) = -\frac{eE_x(z)}{m} \frac{\sin(\omega t)}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{e}{m\omega} \frac{\partial x}{\partial t} \cos(\omega t - kz) \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \end{aligned} \quad (13.20).$$

Далее считаем, что электрон совершает два вида движения: быстрое осциллирующее движение $x_\omega(t)$ по оси OX и медленное движение $z_g(t)$ по оси OZ . Быстрое осциллирующее движение совершается под действием осциллирующего электрического поля СВЧ волны, – за это движение отвечает первое уравнение системы (13.20). Медленное движение электрона связано с движением, определяемым неоднородностью СВЧ поля по оси OZ , – за это отвечает второе уравнение системы (13.20). Из (13.20) вычисляем скорость быстрого движения электрона по оси OX :

$$\frac{\partial x_{\omega}}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{eE_x(z)}{m\omega} \frac{1}{(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2})} \cos(\omega t) \quad (13.21).$$

Полученное уточненное выражение для проекции скорости электрона на ось OX (13.21) подставим во второе уравнение системы (13.20), и получаем уравнение для вычисления медленного движения электрона по оси OZ :

$$\frac{\partial^2 z_g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{e^2 E_x(z)}{m^2 \omega^2} \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \frac{1}{(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2})} \cos^2(\omega t) \quad (13.22).$$

Усреднение (13.22) по периоду СВЧ поля дает $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$. Далее, вводя под знак дифференциала электрическую компоненту СВЧ поля, получим следующее уравнение для описания медленного движения электрона по оси OZ :

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = - \frac{1}{(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2})} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \right] \quad (13.23).$$

Умножим (13.23) на скорость $V_z(t) = \frac{\partial z}{\partial t}$, и затем, переходя от частных к полным производным по времени, получаем первый интеграл для медленного движения электрона вдоль оси OZ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) &= - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m^2 \omega^2} \right] \frac{1}{(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2})} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial z}{2 \partial t} \right]^2 &= - \frac{d}{dt} \left[\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m^2 \omega^2} \right] \frac{1}{(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2})} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{m V_z^2}{2} + \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2})} \right] &= 0 \\ \frac{m V_z^2}{2} + \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2})} &\equiv \frac{m V_z^2}{2} + \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} = const \end{aligned} \quad (13.24).$$

Таким образом, в условиях, когда электрическая компонента неоднородного СВЧ поля $E_x(z)$ ориентирована по оси OX с произвольной неоднородностью по оси OZ , т.е. в условиях, когда градиент неоднородности СВЧ поля $\nabla \vec{E}^2(z)$ коллинеарен оси распространения волны OZ , а постоянное однородное магнитное поле H_{OZ} ориентировано также вдоль направления OZ , и совпадает по направлению с градиентом СВЧ поля, то СВЧ квазипотенциал $\Phi_{\omega H}(z)$ представляет собой выражение вида:

$$\Phi_{\omega H}(z) = \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \equiv \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} \quad (13.25).$$

При малых постоянных магнитных полях, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \ll 1$, СВЧ квазипотенциал практически совпадает с СВЧ квазипотенциалом в отсутствие магнитного поля:

$$\Phi_{\omega H}(z) = \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} = \Phi_{\omega} \quad (13.26).$$

При больших значениях магнитного поля, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} > 1$ СВЧ квазипотенциал становится отрицательным:

$$\Phi_{\omega H}(z) = -\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1)} \equiv -\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m(\Omega^2 - \omega^2)} \quad (13.27).$$

При очень сильных постоянных однородных магнитных полях, когда $\frac{\Omega^2}{\omega^2} \gg 1$ знак СВЧ квазипотенциала будет отрицательным, а его величина значительно меньше по величине СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля.

$$\Phi_{\omega H}(z) = -\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \cdot \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1)} \approx -\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\Omega^2} \ll -\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} = \Phi_{\omega} \quad (13.28).$$

Рассмотрим СВЧ квазипотенциал вблизи электронного циклотронного резонанса, т.е. когда $\Omega \approx \omega$. Сначала рассмотрим подход к резонансу со стороны больших частот СВЧ излучения, т.е. когда выполняются соотношения:

$$\omega - \Omega = \delta > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{\omega} \approx \frac{\delta}{\Omega} \ll 1 \quad (13.29).$$

Для этого случая рассчитаем величину резонансного множителя СВЧ квазипотенциала:

$$1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2} = \frac{(\omega - \Omega)(\omega + \Omega)}{\omega^2} \approx \frac{2\delta\omega}{\omega^2} = \frac{2\delta}{\omega} \approx \frac{2\delta}{\Omega} \ll 1 \quad (13.30).$$

Подставляем (13.30) в выражение для СВЧ квазипотенциала (13.25) и получаем выражение $\Phi_{\omega H}(z)$ для случая приближения частоты СВЧ поля к резонансной электронной циклотронной частоте со стороны больших частот $\omega \geq \Omega$:

$$\Phi_{\omega H}(z) = \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2 \cdot 2\delta/\omega} = \frac{e^2 E_x^2(z)}{8m\omega\delta} \gg \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \quad (13.31).$$

Из (13.31) видно, что знак СВЧ квазипотенциала положительный и соответствует знаку СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля. В то же время его величина может значительно превосходить величину СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля.

Теперь рассмотрим подход к резонансу со стороны малых частот СВЧ излучения, т.е. когда выполняются соотношения:

$$\omega - \Omega = -\delta < 0 \quad \text{и} \quad \left| \frac{\delta}{\omega} \right| \approx \left| \frac{\delta}{\Omega} \right| \ll 1 \quad (13.32).$$

Резонансный множитель станет отрицательным и примет вид:

$$1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2} = \frac{(\omega - \Omega)(\omega + \Omega)}{\omega^2} \approx -\frac{2\delta\omega}{\omega^2} = -\frac{2\delta}{\omega} \approx -\frac{2\delta}{\Omega} < 0 \quad (13.33).$$

и $\left| \frac{2\delta}{\Omega} \right| \ll 1$

Подставляем (13.33) в выражение для СВЧ квазипотенциала (13.25), и получаем выражение для СВЧ квазипотенциала $\Phi_{\omega H}(z)$ для случая приближения частоты СВЧ поля ω к резонансной электронной циклотронной частоте Ω со стороны малых частот ($\omega < \Omega$):

$$\Phi_{\omega H}(z) = \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})} \approx -\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \frac{\delta}{\omega} = -\frac{e^2 E_x^2(z)}{8m\omega\delta} \quad (13.34).$$

и $\left| \frac{e^2 E_x^2(z)}{8m\omega\delta} \right| \gg \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2}$

Из (13.34) видно, что для этого резонансного случая абсолютная величина СВЧ квазипотенциала может значительно превосходить значение СВЧ квазипотенциала в отсутствие магнитного поля, а его знак отрицательный.

Таким образом, в конфигурации полей $\nabla \vec{E}^2(z,t) \updownarrow \vec{e}_z \perp \vec{E}(z,t) \updownarrow \vec{e}_x \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{e}_z$ при небольших значениях постоянного однородного магнитного поля, для которых выполняется условие $(\Omega^2 / \omega^2) < 1$, реализуется закон сохранения суммы кинетической энергии направленного движения электрона и осцилляторной энергии электрона:

$$\frac{mV_z^2}{2} + \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} = \text{const} \quad (13.35).$$

Это соотношение (13.35) означает, что в неоднородном СВЧ поле в присутствии постоянного однородного магнитного поля при $\Omega^2 / \omega^2 < 1$ электрон движется из области высокого значения осцилляторной энергии в область с более низким значением осцилляторной энергии. При этом в процессе этого движения электрон приобретает кинетическую энергию направленного движения равную той доли, на которую уменьшилась его осцилляторная энергия.

При больших магнитных полях, когда $(\Omega^2 / \omega^2) > 1$, СВЧ квазипотенциал меняет знак и становится отрицательным, т. е. формируется

квазипотенциальная «яма». При этом закон сохранения энергии электрона будет выглядеть так:

$$\frac{mV_z^2}{2} - \left| \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} \right| = \text{const} \quad (13.36).$$

Уравнение движения электрона (13.23) с силой в правой части в виде градиента квазипотенциала также изменит знак в правой части:

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = + \frac{1}{(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - 1)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^2 E_x^2(z)}{4m\omega^2} \right] \equiv + \frac{\partial}{\partial z} \left| \frac{e^2 E_x^2(z)}{4m(\omega^2 - \Omega^2)} \right| \quad (13.37).$$

Выражение (13.36) и уравнение (12.37) означают, что в неоднородном СВЧ поле в присутствии постоянного однородного магнитного поля в условиях $(\Omega^2 / \omega^2) > 1$ электрон движется по склону «потенциальной ямы» из области низкого абсолютного значения осцилляторной энергии в область с более высоким абсолютным значением осцилляторной энергии, при этом в процессе этого движения электрон приобретает кинетическую энергию направленного движения.

При резонансном случае $(\Omega^2 / \omega^2) \approx 1$ абсолютная величина СВЧ квазипотенциала может значительно превосходить СВЧ квазипотенциал в отсутствие магнитного поля, но его знак будет зависеть от того как происходит приближение к резонансной частоте. При подходе к резонансу со стороны высоких частот СВЧ излучения $(\frac{\omega}{\Omega} \geq 1)$ СВЧ квазипотенциал имеет положительный знак, и при приближении к резонансу возрастает. При переходе через резонанс $\Omega^2 / \omega^2 = 1$ СВЧ квазипотенциал меняет знак и становится отрицательным, и характер движения электрона существенно меняется.

Лекция 14. Уравнение движения электронов в СВЧ поле при учете упругих столкновений с атомами или ионами

Основная цель данной лекции состоит в том, чтобы на основе простых физических законов описать движения электрона в СВЧ поле при наличии столкновений с частицами плазмы. Теория столкновений электронов с частицами плазмы с учетом многих сопутствующих процессов (упругие столкновения с атомами и ионами, неупругие столкновения с атомами, включая возбуждение атомов, ионизацию атомов, возбуждение ионов и их многократная ионизация и т.п.) является весьма сложной. К настоящему времени эта теория не является завершенной, она продолжает разрабатываться. Конкретная задача лекции состоит в выведении простого уравнения движения электрона в СВЧ поле при учете только упругих столкновений электрона с атомами фонового газа.

Предварительно рассмотрим задачу о столкновении упругих шаров (материальных точек) из классической механики в нерелятивистском случае, т.е. когда скорости шаров существенно меньше скорости света. Эта задача представляется важной для дальнейшего рассмотрения движения электронов в СВЧ поле с учетом столкновений электронов с частицами, входящими в состав плазмы.

Сначала рассмотрим простейшую задачу об абсолютно упругом ударе двух шаров с массами m_1 и m_2 при центральном столкновении этих шаров. Под центральным столкновением будем понимать такой удар, когда шары движутся по прямой вдоль горизонтальной оси, и векторы скоростей сталкивающихся и разлетающихся шаров образуют между собой углы равные 0° или 180° . Гравитационные эффекты в данной задаче не учитываются. Для определенности примем, что массы шаров разные, например, $m_1 < m_2$. Будем полагать, что шары движутся до столкновения в одном направлении со скоростями V_1 и V_2 , при этом $V_1 > V_2$, а после

столкновения величины скоростей будут равны соответственно $\tilde{V}_1$ и $\tilde{V}_2$. При этом все векторы скоростей располагаются на одной оси (рис.14.1).

Будем считать, что при абсолютно упругом ударе потери энергии на изменение внутренней энергии шаров отсутствуют, и выполняются законы сохранения импульса и кинетической энергии шаров до и после удара:

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{\tilde{V}}_1 + m_2 \vec{\tilde{V}}_2 \quad (14.1),$$

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 \tilde{V}_1^2}{2} + \frac{m_2 \tilde{V}_2^2}{2} \quad (14.2).$$

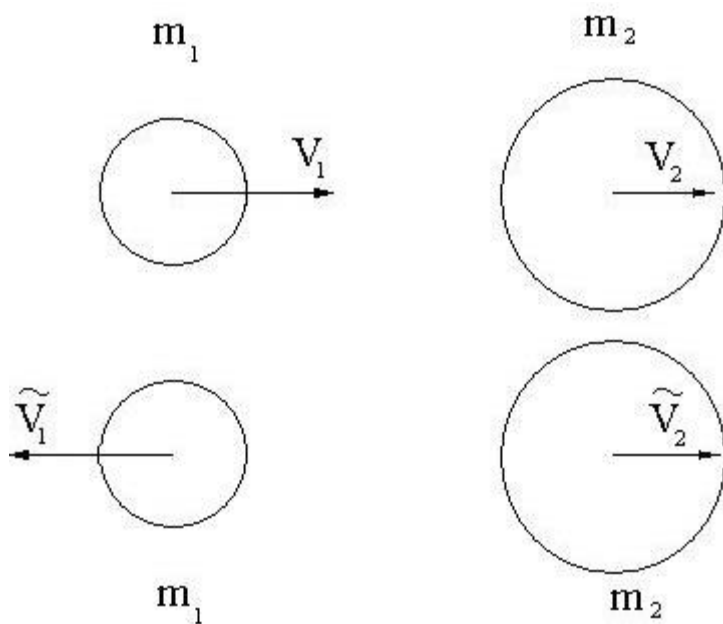


Рис.14.1. Схема упругого столкновения двух шаров при центральном ударе: верхний ряд – направления скоростей до столкновения, нижний ряд – после столкновения

Таким образом, имеется два уравнения и два неизвестных, и, следовательно, система уравнений (14.1) и (14.2) разрешима относительно скоростей шаров после столкновения $\tilde{V}_1$ и $\tilde{V}_2$.

Для центрального удара уравнение (14.1) можно рассматривать как скалярное уравнение, т.к. все скорости до удара и после удара направлены по оси, соединяющей центры шаров, проекции скоростей на ось по абсолютной величине совпадают с величинами скоростей, а их разные направления вдоль оси отличаются знаком: при положительном значении скорость направлена в положительном направлении оси, при отрицательном знаке – в противоположном направлении.

На основании выше сказанного, преобразуем уравнения (14.1) и (14.2) в следующую пару уравнений:

$$m_1(\tilde{V}_1 - V_1) = m_2(V_2 - \tilde{V}_2) \quad (14.3),$$

$$m_1(\tilde{V}_1^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - \tilde{V}_2^2) \quad (14.4).$$

Таким образом, для центрального упругого удара шаров получаем два более удобных для решения уравнения (14.3) и (14.4) для нахождения двух неизвестных $\tilde{V}_1$ и $\tilde{V}_2$. Разделив уравнение (14.4) на уравнение (14.3), получим следующее соотношение для скоростей:

$$\tilde{V}_1 + V_1 = V_2 + \tilde{V}_2 \quad (14.5).$$

Умножая соотношение (14.5) один раз на массу m_1 , а другой раз на массу m_2 , получим следующие два уравнения:

$$m_1(\tilde{V}_1 + V_1) = m_1(V_2 + \tilde{V}_2) \quad (14.6),$$

$$m_2(\tilde{V}_1 + V_1) = m_2(V_2 + \tilde{V}_2) \quad (14.7).$$

Выполнив операцию вычитания уравнения (14.6) из (14.3), получим выражение для определения скорости $\tilde{V}_2$ после столкновения:

$$\begin{aligned} m_1\tilde{V}_1 - m_1V_1 - m_1\tilde{V}_1 - m_1V_1 &= m_2V_2 - m_2\tilde{V}_2 - m_1V_2 - m_1\tilde{V}_2 \\ -2m_1V_1 &= V_2(m_2 - m_1) - \tilde{V}_2(m_1 + m_2) \\ \tilde{V}_2 &= \frac{V_2(m_2 - m_1) + 2m_1V_1}{(m_1 + m_2)} \end{aligned} \quad (14.8).$$

Выполнив операцию сложения уравнения (14.7) и уравнения (14.3), получим выражение для скорости $\tilde{V}_1$ после столкновения:

$$\begin{aligned} m_1\tilde{V}_1 - m_1V_1 + m_2\tilde{V}_1 + m_2V_1 &= m_2V_2 - m_2\tilde{V}_2 + m_2V_2 + m_2\tilde{V}_2 \\ \tilde{V}_1(m_1 + m_2) &= V_1(m_1 - m_2) + 2m_2V_2 \\ \tilde{V}_1 &= \frac{V_1(m_1 - m_2) + 2m_2V_2}{(m_1 + m_2)} \end{aligned} \quad (14.9).$$

Рассмотрим частный случай 1, когда упругие шары имеют одинаковые массы $m_1 = m_2$. Этот случай может быть моделью лобового столкновения (центрального упругого удара) одинаковых частиц в плазме, например, для столкновения электрона с электроном, или столкновения протона с протоном. Тогда из (14.8) и (14.9) получим следующие выражения для скоростей частиц после столкновения:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 &= \frac{2m_2 V_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{2m_2 V_2}{2m_2} = V_2 \\ \tilde{V}_2 &= \frac{2m_1 V_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{2m_1 V_1}{2m_1} = V_1\end{aligned}\tag{14.10}$$

Из выражений (14.10) видно, что при центральном упругом ударе одинаковые по массе частицы, не имеющие внутренних энергетических состояний, просто обмениваются скоростями или импульсами. Если интерпретировать такого рода столкновение одинаковых шаров как столкновение двух идентичных электронов в плазме, то в этом случае между ними происходит обмен импульсами. С другой стороны, такой обмен импульсами между идентичными электронами можно интерпретировать и так, что один электрон как бы проходит сквозь другой электрон без потери импульса. Это также могло бы означать, что при центральном столкновении двух идентичных электронов в отсутствие их столкновений с частицами плазмы другого сорта (атомами или ионами), не происходит перераспределения импульсов и обмена энергиями между электронами, и, таким образом, невозможно было бы установление энергетического равновесия между электронами только за счет электрон–электронных столкновений. Однако центральные столкновения происходят очень редко. Как будет видно в дальнейшем, при нецентральном упругом ударе обмен импульсами и энергиями между одинаковыми шарами (частицами) будет происходить.

Рассмотрим случай 2, когда упругие шары имеют существенно различные массы, например, соотношение масс таково, что $m_1 \ll m_2$. Далее еще более упростим задачу, полагая, что до столкновения скорость тяжелой частицы была существенно меньше скорости легкой частицы $V_2 \ll V_1$, а направления скоростей совпадают. Эта ситуация может быть приближенной моделью упругого столкновения двух разных частиц в плазме с существенно различающимися массами, например, столкновение быстро движущегося легкого электрона с медленным тяжелым нейтральным атомом. Тогда из (14.8) и (14.9) получим следующие выражения для скоростей частиц после столкновения:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1 &= \frac{V_1(m_1 - m_2) + 2m_2 V_2}{(m_1 + m_2)} \approx \frac{-m_2 V_1 + 2m_2 V_2}{m_2} = -V_1 + 2V_2 \\ \tilde{V}_2 &= \frac{V_2(m_2 - m_1) + 2m_1 V_1}{(m_1 + m_2)} \approx \frac{m_2 V_2 + 2m_1 V_1}{m_2} = V_2 + V_1 \frac{2m_1}{m_2}\end{aligned}\quad (14.11).$$

Из выражений (14.11) видно, что при центральном упругом ударе двух существенно отличающихся по массам частиц, из которых быстрая легкая частица движется с существенно бóльшей скоростью, чем тяжелая медленная частица, происходят изменения скоростей (импульсов) у обеих частиц в результате столкновения. При этом легкая частица в результате столкновения меняет направление скорости на противоположное по отношению к направлению скорости до столкновения. Абсолютная величина скорости легкой частицы после столкновения уменьшается на две скорости тяжелой частицы при движении легкой частицы вдогонку тяжелой. Скорость легкой частицы может увеличиться на две скорости тяжелой частицы при движении частиц навстречу друг другу. В то же время тяжелая частица увеличивает свою скорость на величину скорости легкой частицы, умноженной на удвоенное отношение массы легкой частицы к массе тяжелой частицы при движении вдогонку, и уменьшает скорость на эту же величину при движении частиц навстречу. Если тяжелая частица покоится до столкновения, то при

упругом столкновении с быстрой легкой частицей тяжелая частица всегда приобретает малый импульс от легкой частицы, а легкая частица всегда меняет вектор своей скорости на противоположный и теряет часть своего импульса. Из (14.11) ясно, что при упругом столкновении двух существенно отличающихся по массе частиц между ними происходит перераспределение импульсов и, следовательно, в результате столкновения происходят изменения в распределении кинетической энергии между сталкивающимися частицами.

Рассмотрим более общий случай столкновения двух упругих шаров с массами m_1 и m_2 при нецентральном упругом ударе шаров, когда между векторами скоростей сталкивающихся шаров имеется угол отличный от нулевого (рис. 14.2).

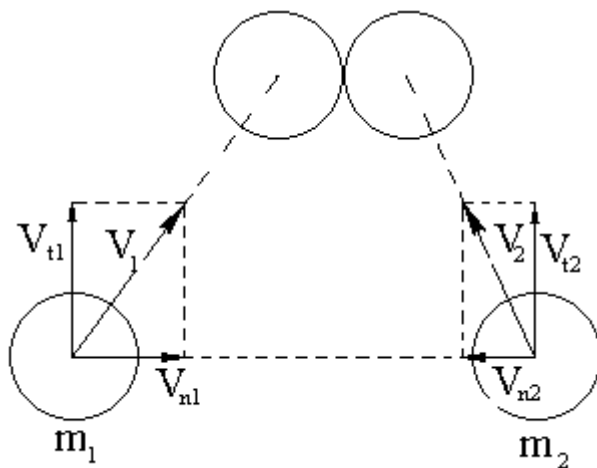


Рис.14.2. Схема начального состояния двух шаров и их скоростей до их упругого столкновения при нецентральном ударе.

В этом случае векторы скоростей V_1 и V_2 шаров m_1 и m_2 до столкновения раскладываются на нормальные составляющие, соответственно V_{n1} и V_{n2} , и на тангенциальные составляющие, соответственно V_{t1} и V_{t2} . Обозначив нормальные и тангенциальные компоненты скоростей шаров m_1 и m_2 после удара соответственно как $\tilde{V}_{n1}$, $\tilde{V}_{n2}$, $\tilde{V}_{t1}$, $\tilde{V}_{t2}$, запишем законы сохранения импульсов для нормальных и тангенциальных компонент до и после удара в следующем виде:

$$\begin{aligned}
m_1 V_{n1} + m_2 V_{n2} &= m_1 \tilde{V}_{n1} + m_2 \tilde{V}_{n2} \\
m_1 V_{t1} + m_2 V_{t2} &= m_1 \tilde{V}_{t1} + m_2 \tilde{V}_{t2}
\end{aligned}
\tag{14.12}.$$

Между величинами скоростей и их компонентами имеются соотношения:

$$\begin{aligned}
V_1^2 &= V_{n1}^2 + V_{t1}^2 \\
V_2^2 &= V_{n2}^2 + V_{t2}^2 \\
\tilde{V}_1^2 &= \tilde{V}_{n1}^2 + \tilde{V}_{t1}^2 \\
\tilde{V}_2^2 &= \tilde{V}_{n2}^2 + \tilde{V}_{t2}^2
\end{aligned}
\tag{14.13}$$

На основании (14.13) запишем закон сохранения кинетической энергии для шаров в следующем виде:

$$\frac{m_1(V_{t1}^2 + V_{n1}^2)}{2} + \frac{m_2(V_{t2}^2 + V_{n2}^2)}{2} = \frac{m_1(\tilde{V}_{t1}^2 + \tilde{V}_{n1}^2)}{2} + \frac{m_2(\tilde{V}_{t2}^2 + \tilde{V}_{n2}^2)}{2} \tag{14.14}.$$

Таким образом, в двух уравнениях (14.12) и одном уравнении (14.14) имеется 4 неизвестных компонентов скоростей шаров после удара. Необходимо еще одно дополнительное условие или уравнение для того, чтобы задача имела однозначные решения для компонентов скоростей частиц после столкновения. Этим условием может быть предположение, что в момент удара между шарами не возникает сил трения. Это условие согласуется с законом сохранения механической энергии при абсолютно упругом ударе шаров, так как при наличии сил трения между ними должна происходить диссипация механической энергии в тепловую, и, следовательно, законы сохранения механической кинетической энергии и импульсов шаров до и после удара не будут выполняться. Отсутствие же сил трения между шарами в момент столкновения соответствует тому, что дополнительные тангенциальные силы между шарами в момент столкновения также отсутствуют, и, следовательно, тангенциальные компоненты скорости шаров должны сохраняться до и после момента удара:

$$\begin{aligned}
V_{t1} &= \tilde{V}_{t1} \\
V_{t2} &= \tilde{V}_{t2}
\end{aligned}
\tag{14.15}.$$

Учитывая соотношения (14.15), из трех уравнений (14.12) и (14.14), второе уравнение в (14.12) выпадает из рассмотрения, т.к. является тождеством. Тогда остается только два независимых уравнения: первое уравнение системы (14.12), уравнение (14.14) и два неизвестных параметра, которые представляют собой две нормальные компоненты скоростей ($\tilde{V}_{n1}$ и $\tilde{V}_{n2}$) после удара шаров:

$$\begin{aligned} m_1 V_{n1} + m_2 V_{n2} &= m_1 \tilde{V}_{n1} + m_2 \tilde{V}_{n2} \\ \frac{m_1 V_{n1}^2}{2} + \frac{m_2 V_{n2}^2}{2} &= \frac{m_1 \tilde{V}_{n1}^2}{2} + \frac{m_2 \tilde{V}_{n2}^2}{2} \end{aligned} \quad (14.16).$$

Уравнения (14.16) аналогичны уравнениям (14.1) и (14.2), описывающим центральный упругий удар шаров. Таким образом, при нецентральной упругом ударе нормальные составляющие скоростей ведут себя так же, как при центральном ударе, а тангенциальные составляющие не изменяются, и для нормальных компонент скоростей выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{n1} &= \frac{V_{n1}(m_1 - m_2) + 2m_2 V_{n2}}{(m_1 + m_2)} \\ \tilde{V}_{n2} &= \frac{V_{n2}(m_2 - m_1) + 2m_1 V_{n1}}{(m_1 + m_2)} \end{aligned} \quad (14.17).$$

В частном случае при одинаковых массах шаров, когда $m_1 = m_2$, шары обмениваются нормальными составляющими скоростей, а тангенциальные составляющие скоростей остаются неизменными:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{n1} &= \frac{2m_2 V_{n2}}{(m_1 + m_2)} = \frac{2m_2 V_{n2}}{2m_2} = V_{n2} \\ \tilde{V}_{n2} &= \frac{2m_1 V_{n1}}{(m_1 + m_2)} = \frac{2m_1 V_{n1}}{2m_1} = V_{n1} \end{aligned} \quad (14.18)$$

Таким образом, при нецентральной упругом соударении двух одинаковых по массе шаров, не имеющих внутренних энергетических состояний, эти шары изменяют свои импульсы и энергии. Обобщение этого результата на электроны плазмы приводит к выводу, что при столкновениях

электронов плазмы друг с другом даже в пренебрежении столкновениями электронов с другими частицами плазмы (атомами и ионами), возможно установления энергетического равновесия между электронами плазмы за счет только электрон–электронных столкновений.

Если упругое столкновения электронов с атомами, можно приближенно смоделировать задачей о столкновении упругих шаров с существенно различающимися массами, то при соотношении масс $m_1 \ll m_2$, можно упростить ситуацию, полагая, что скорость тяжелого атома мала V_2 , по сравнению со скоростью электрона V_1 ($V_2 \ll V_1$). Тогда из (14.17) получим следующие выражения для нормальных составляющих скоростей частиц после столкновения:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{n1} &= \frac{V_{n1}(m_1 - m_2) + 2m_2 V_{n2}}{(m_1 + m_2)} \approx \frac{-V_{n1}m_2 + 2m_2 V_{n2}}{m_2} = -V_{n1} + 2V_{n2} \\ \tilde{V}_{n2} &= \frac{V_{n2}(m_2 - m_1) + 2m_1 V_{n1}}{(m_1 + m_2)} \approx \frac{V_{n2}m_2 + 2m_1 V_{n1}}{m_2} = V_{n2} + V_{n1} \frac{2m_1}{m_2}\end{aligned}\quad (14.19).$$

В частном случае почти нулевой скорости атома $V_2 \approx 0$, из (14.19) получаем выражения:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{n1} &\approx -V_{n1} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ \tilde{V}_{n2} &\approx V_{n1} \frac{2m_1}{m_2}\end{aligned}\quad (14.20).$$

Из выражений (14.20) можно сделать некоторые обобщения для столкновений электронов и атомов в слабоионизованной плазме, в которой преобладают электрон – атомные упругие столкновения. Скоростью атома до столкновения, как правило, можно пренебречь и принять равной нулю по сравнению со скоростью электрона, т.к. при температуре электронов значительно превышающей среднюю энергию атомов, их скорости отличаются не менее чем на два порядка по величине. Тогда, при упругом столкновении электрона с практически неподвижным атомом, электрон

должен отразиться от атома со скоростью, отличающейся от первоначальной в $\frac{m_2}{m_1+m_2}$ раз, при этом атом приобретет скорость в $\frac{2m_1}{m_2}$ раз меньшую первоначальной скорости электрона. Важно отметить, что при таком столкновении происходит перераспределение импульсов и энергий между электронами и атомами плазмы, и, следовательно, возможна хаотизация движения электронов и установление равновесного распределения по импульсам и энергиям электронной компоненты плазмы. Важным обстоятельством является то, что при рассмотрении столкновения электрона с атомом можно ограничиться двумя компонентами скорости, нормальной и тангенциальной, так как покоящийся атом (материальная точка) и движущийся электрон (имеющий векторы импульсов до и после столкновения) образуют плоскость, в которой расположены все компоненты скоростей.

Используя формулу (14.20) для скорости тяжелой частицы M , рассчитаем ее энергию $\mathcal{E}_a = \frac{M}{2}(\tilde{V}_a)^2$, которую может приобрести первоначально покоящийся атом массой M при упругом столкновении с электроном массой m_e , имеющим первоначальную скорость V_e и энергию $\mathcal{E}_e$:

$$\mathcal{E}_a = \frac{M}{2}(\tilde{V}_a)^2 \approx \frac{M}{2}\left(V_e \frac{2m_e}{M}\right)^2 = \frac{MV_e^2 \cdot 4m_e^2}{2M^2} = \frac{m_e V_e^2 \cdot 2m_e}{M} \quad (14.21),$$

Не ограничивая общности рассмотрения, можно считать, что нормальная и тангенциальная скорости электрона в среднем примерно равны V_e , следовательно, полная энергия электрона равна удвоенной энергии, обусловленной нормальной компонентой скорости, т.е. $\mathcal{E}_e = 2 \frac{m_e V_e^2}{2} = m_e V_e^2$.

Тогда доля энергии электрона ξ , переданная при столкновении атому и

потерянная электроном при столкновении, определится из следующего соотношения:

$$\xi = \frac{\mathcal{E}_a}{\mathcal{E}_e} = \frac{m_e V_e^2 \cdot 2m_e}{m_e V_e^2 M} = 2 \frac{m_e}{M} \quad (14.22).$$

Далее, опираясь на выполненные выше расчеты, определим эффективную силу F_e , которая действует на электрон при столкновении с атомом. Характер движения электрона в редкой слабоионизованной плазме в отсутствие внешних сил таков, что в основном он движется равномерно и прямолинейно, но в момент столкновения с атомом электрон испытывает резкое изменение направления своей скорости. Это изменение происходит скачком за временной интервал, соизмеримый со временем прохождения электрона «сквозь» атом. Для плазмы с температурой электронов в несколько эВ средние скорости электрона составляют около 10^8 см/с, и при среднем размере атома 10^{-8} см время столкновения составляет около 10^{-16} с. Такие короткие во времени процессы трудно описать дифференциальным уравнением, которое предполагает непрерывность характерных функций и параметров, описывающих такие физические процессы. Поэтому нам необходимо для упрощения задачи предположить, что процесс потери импульса и энергии электроном происходит не «мгновенно», а непрерывно в течение всего интервала времени от одного столкновения до другого. При таком предположении мы будем считать, что электрон изменяет импульс малыми порциями или непрерывно во времени так, что суммарно полные потери импульса во временном интервале между столкновениями составляют ту же величину, которая реально теряется непосредственно в момент столкновения. При таких предположениях возможно построение дифференциального уравнения, описывающего движение электрона при наличии столкновений в слабоионизованной плазме. При этом условии характерное время изменения импульса электрона будет равно среднему временному интервалу между столкновениями электрона с атомом τ_{ea} . Это

позволяет составить дифференциальное уравнение, описывающее постепенные потери импульса и энергии электроном во временном интервале между столкновениями. Этот подход называется гидродинамическим, при этом движение электрона в плазме с редкими столкновениями заменяется движением в «вязкой» жидкости. Важно в дальнейшем убедиться, что такой подход дает правильные результаты для расчета потерь энергии электроном, которые можно сопоставить с известными результатами из физической электроники. Поэтому при составлении уравнения, описывающего движение электрона в СВЧ поле и потери энергии электроном в результате столкновения с атомами, будем далее сравнивать получаемые решения с известными выражениями для низкотемпературной слабоионизованной плазмы, полученными ранее для постоянных электрических полей.

Общее выражение для силы «трения», которая «тормозит» электрон между столкновениями с атомами в слабоионизованной плазме, должно иметь вид усредненного изменения импульса электрона $m_e \Delta \vec{V}_e$ за временной интервал Δt :

$$\vec{F}_e = \left\langle \frac{m_e \Delta \vec{V}_e}{\Delta t} \right\rangle \quad (14.23).$$

Для расчета этой силы необходимо рассчитать изменение скорости электрона $\Delta \vec{V}_e$ при столкновении с атомом за характерное время потерь, равное среднему временному интервалу между столкновениями электрона с атомами газа $\Delta t \approx \tau_{ea}$. Для анализа процесса упругого столкновения электрона с атомом удобно рассмотреть ниже следующую диаграмму (рис. 14.3). Из этой диаграммы получаем следующие соотношения между скоростями частиц до столкновения $\vec{V}_e$ и после столкновения $\vec{\tilde{V}}_e$:

$$\begin{aligned}
\vec{V}_e + \Delta\vec{V}_e &= \vec{\tilde{V}}_e \\
\vec{\tilde{V}}_e - \vec{V}_e &= \Delta\vec{V}_e \\
|\Delta\vec{V}_{ne}| &= |\vec{V}_e| - |\vec{\tilde{V}}_e| \cos \theta
\end{aligned}
\tag{14.24}$$

здесь $\Delta\vec{V}_e$ изменение скорости электрона в результате столкновения.

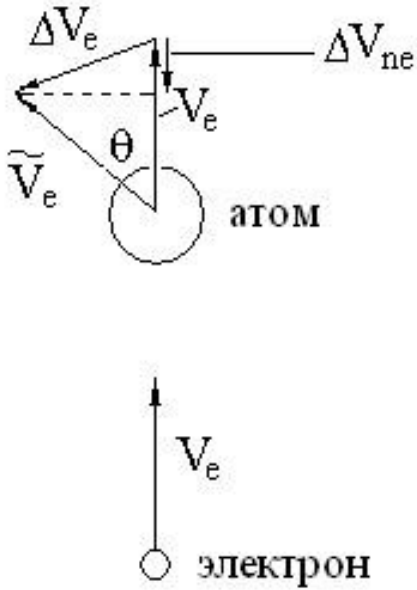


Рис.14.3. Диаграмма, поясняющая упругое столкновение электрона с атомом с отклонением электрона на угол θ относительно первоначального направления его скорости.

Учитывая (14.20), имеем такое соотношение между величинами скоростей электрона до и после столкновения $|\vec{V}_e| \approx |\vec{\tilde{V}}_e|$. Тогда из (14.24) получаем следующее выражение для проекции $\Delta\vec{V}_{ne}$ вектора изменения скорости $\Delta\vec{V}_e$ на линию первоначальной скорости электрона:

$$|\Delta\vec{V}_{ne}| = |\vec{V}_e| - |\vec{\tilde{V}}_e| \cos \theta \approx |\vec{V}_e| (1 - \cos \theta) \tag{14.25}.$$

При этом направление вектора $\Delta\vec{V}_{ne}$ противоположно вектору первоначальной скорости электрона $\vec{V}_e$, и, стало быть, электрон в результате столкновения получает импульс, противоположный первоначальному импульсу, который имел электрон до столкновения. Таким образом, возникает сила, «тормозящая» движение электрона вследствие столкновения.

Подставляя (14.25) в общее выражение для силы (14.23), получаем:

$$\vec{F}_e = -\left\langle \frac{m_e \Delta \vec{V}_e}{\Delta t} \right\rangle \approx -\left\langle m_e \frac{\vec{V}_e (1 - \cos \theta)}{\tau_{ea}} \right\rangle \approx -\frac{m_e \vec{V}_e (1 - \langle \cos \theta \rangle)}{\tau_{ea}} \approx -m_e \vec{V}_e \nu \quad (14.26),$$

где введено обозначение $\langle \cos \theta \rangle$ как усреднение по углам рассеяния, ν – частота упругих столкновений электрона с атомами:

$$\nu = \frac{(1 - \langle \cos \theta \rangle)}{\tau_{ea}} \quad (14.27).$$

Частота упругих столкновений ν зависит от многих параметров: от распределения электронов по энергии, от рода газа и его температуры, от присутствия примесей других газов и т.д. Поэтому расчет частоты столкновений и ее экспериментальное измерение представляются весьма сложными задачами. Здесь мы ограничимся простейшим случаем, в котором будем полагать, что частота столкновений является величиной, зависящей только от объемной концентрации атомов или молекул газа, а в предположении постоянной температуры газа, частота столкновений зависит только от давления газа. Например, для воздуха в диапазоне давлений газа p от 0,0001 до 100 Тор при нормальной температуре газа в диапазоне энергий электронов 1 – 100 эВ величина частоты столкновений электронов с атомами и молекулами воздуха может быть приближенно описана следующим выражением:

$$\nu \approx 5 \cdot 10^9 p \quad (14.28).$$

Здесь следует заметить, что диаграмма столкновения (рис. 14.3) и соотношения между векторами скоростей электрона до и после столкновения не зависят от характера (закона) взаимодействия электрона и атома, и, поэтому такие же расчеты можно проделать и для столкновения электрона с ионом, взаимодействие которых на близком расстоянии определяется законом Кулона. Таким образом, это рассмотрение будет справедливо и для столкновения электронов с ионами в плазме (т.н. кулоновские столкновения),

в которой электроны в основном движутся свободно между столкновениями с ионами. Поэтому все сказанное выше справедливо и для электрон – ионных столкновений при соответствующем задании частоты столкновений электронов с ионами, которое будет выражаться существенно более сложными формулами в зависимости от электронной температуры плазмы.

Рассмотрим теперь движение электронов в однородном СВЧ поле $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ в слабоионизованной плазме в присутствии атомов газа, с которыми электроны сталкиваются упруго. В результате столкновения электрона с атомом происходят изменения импульсов и кинетической энергии, как электрона, так и атома, но внутренние энергетические уровни атома при этом не возбуждаются. В этом случае электроны будут совершать осциллирующие движения в СВЧ поле, и изредка сталкиваться с атомами газа. При этом, как мы предположили ранее, столкновения с атомами можно интерпретировать как силу вязкого «трения». Тогда уравнение движения электрона в электрическом СВЧ поле $E_0 \sin(\omega t)$ с учетом частоты столкновений ν , можно представить в следующем виде:

$$m_e \frac{dV_e}{dt} = -eE_0 \sin(\omega t) - \nu m_e V_e$$

$$\frac{dV_e}{dt} + \nu V_e = -\frac{eE_0 \sin(\omega t)}{m_e} \quad (14.29),$$

здесь V_e – скорость электрона, m_e – масса электрона.

Из (14.29) видно, что движение электрона описывается известным дифференциальным уравнением первого порядка вида:

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (14.30),$$

общее решение которого имеет вид:

$$y(x) = \left\{ \int dx \left[Q(x) \cdot \exp \left(\int P(x) dx \right) \right] + C_1 \right\} \cdot \exp \left(- \int P(x) dx \right) \quad (14.31).$$

В нашем случае устанавливаются следующие соответствия между функциями и переменными уравнений (14.29) и (14.30):

$$\begin{aligned}
x &\Rightarrow t; \quad y(x) \Rightarrow V(t); \\
Q(x) &\Rightarrow -\frac{eE_0}{m_e} \sin(\omega t); \\
P(x) &\Rightarrow v; C_1 \Rightarrow \text{const}
\end{aligned} \tag{14.32}.$$

Тогда решение уравнения (14.29) будет представляться в виде выражения:

$$V_e(t) = \left\{ \left[\int dt \left(-\frac{eE_0}{m_e} \sin(\omega t) \cdot e^{vt} \right) \right] + C_1 \right\} e^{-vt} \tag{14.33}.$$

Вычислим интеграл J в квадратных скобках (14.35) методом «по частям»:

$$\begin{aligned}
J &= \int dt \left[-e^{vt} \frac{eE_0}{m_e} \sin \omega t \right] = \frac{1}{v} \int \left[-\frac{eE_0}{m_e} \sin \omega t \right] d(e^{vt}) = \\
&= -\frac{1}{v} e^{vt} \frac{eE_0}{m_e} \sin \omega t + \frac{\omega}{v} \int e^{vt} \left[\frac{eE_0}{m_e} \cos \omega t \right] dt = \\
&= -\frac{1}{v} e^{vt} \frac{eE_0}{m_e} \sin \omega t + \frac{\omega}{v^2} e^{vt} \frac{eE_0}{m_e} \cos \omega t - \frac{\omega^2}{v^2} \int dt \left[-e^{vt} \frac{eE_0}{m_e} \sin \omega t \right]
\end{aligned} \tag{14.34}$$

В правой части (14.34) третий член равен левой части уравнения, умноженный на коэффициент $\frac{\omega^2}{v^2}$. Тогда из (14.34) получаем алгебраическое

уравнение для вычисления интеграла J :

$$\begin{aligned}
J &= -\frac{1}{v} e^{vt} \frac{eE_0}{m_e} \sin \omega t + \frac{\omega}{v^2} e^{vt} \frac{eE_0}{m_e} \cos \omega t - \frac{\omega^2}{v^2} J \\
J(1 + \frac{\omega^2}{v^2}) &= -\frac{1}{v} e^{vt} \frac{eE_0}{m_e} \sin(\omega t) + \frac{\omega}{v^2} e^{vt} \frac{eE_0}{m_e} \cos(\omega t) \\
J &= -\frac{eE_0}{m_e} \left[\frac{v}{\omega^2 + v^2} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega^2 + v^2} \cos(\omega t) \right] e^{vt}
\end{aligned} \tag{14.35}.$$

Подставляя выражение для интеграла J в квадратные скобки выражения (14.33), получаем в явном виде выражение для скорости электронов в СВЧ поле с учетом упругих столкновений электронов с атомами газа:

$$V_e(t) = -\frac{eE_0}{m_e} \left[\frac{v}{\omega^2 + v^2} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega^2 + v^2} \cos(\omega t) \right] + C_1 e^{-vt} \tag{14.36}.$$

Постоянная величина C_1 в выражении (14.36) может быть интерпретирована как начальная скорость электрона V_0 в отсутствии СВЧ поля при $E_0 = 0$. Ясно, что роль начальной скорости электрона при наличии внешнего СВЧ поля и последующих столкновений будет незначительной. Это также видно из выражения (14.36): при больших временах $t \gg \nu^{-1}$, член $C_1 e^{-\nu t} = V_0 e^{-\nu t}$ устремляется к нулю. С учетом этих обстоятельств, окончательное решение для скорости электрона в СВЧ поле при наличии упругих столкновений можно представить в виде следующего выражения:

$$V_e(t) = -\frac{eE_0}{m_e} \left[\frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega^2 + \nu^2} \cos(\omega t) \right] \quad (14.37).$$

Для удобства анализа этого выражения и сравнения его с выражением для скорости электрона в СВЧ поле в отсутствии столкновений, преобразуем (14.37) к следующему виду:

$$V_e(t) = -\frac{eE_0}{m_e \sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \left[\frac{\nu}{\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \sin \omega t - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \cos \omega t \right] \quad (14.38).$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{\nu}{\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} = \sin \varphi; \quad \text{тогда} \quad \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} = \cos \varphi \quad (14.39).$$

Подставляя (14.39) в (14.38) и сворачивая выражение в квадратных скобках в виде косинуса суммы двух величин $\omega t + \varphi$, получим удобное для анализа выражение для скорости электрона в осциллирующем СВЧ поле с учетом столкновений:

$$V_e(t) = -\frac{eE_0}{m_e \sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \cos(\omega t + \varphi) \equiv -\frac{eE_0}{m_e \omega \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2}}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (14.40).$$

Это выражение для скорости электрона в СВЧ поле с учетом столкновений имеет сходную структуру, что и выражение для скорости электрона в СВЧ поле без столкновений $V_e(t) = \frac{eE_0}{m_e \omega} \cos \omega t$. При учете электронных

столкновений, в знаменателе выражения (14.40) для скорости электрона вместо частоты СВЧ поля ω возникло выражение $\omega\sqrt{1+\frac{v^2}{\omega^2}}$, а в аргументе осциллирующей функции появился сдвиг фазы φ относительно действующего СВЧ поля. Таким образом, столкновения электронов с атомами приводят к нарушению синхронизма между движением электрона и осцилляциями СВЧ поля.

При малых частотах столкновений $\frac{v}{\omega} \ll 1$, выражение для осцилляторной скорости электрона практически совпадает с выражением для осцилляторной скорости электрона в СВЧ поле в отсутствии столкновений. При больших частотах столкновений $\frac{v}{\omega} \gg 1$ выражение для скорости электрона трансформируется в следующее выражение:

$$V_e(t) = \frac{eE_0}{m_e \sqrt{\omega^2 + v^2}} \cos(\omega t + \varphi) \approx \frac{eE(t)}{m_e v} = V_{dr} \quad (14.41).$$

Выражение (14.41) совпадает с формулой для дрейфовой скорости электрона V_{dr} в газе или плазме в постоянном или медленно меняющемся электрическом поле $E(t)$, применяемой в физической электронике.

Таким образом, несмотря на упрощения при выводе уравнения для скорости электрона в СВЧ поле при наличии столкновений, асимптотические выражения для решений совпадают как с ранее полученным решением для осцилляторной скорости электрона без учета столкновений, так и с выражением для дрейфовой скорости электрона в постоянном электрическом поле. Эти асимптотические решения подтверждают справедливость выражений (14.37) и (14.40) как для случая $\frac{v}{\omega} \gg 1$, так и для случая $\frac{v}{\omega} \ll 1$.

Лекция 15. Уравнение для энергии электронов в СВЧ поле при учете упругих столкновений в плазме. Прохождение СВЧ излучения через слой и поглощение СВЧ излучения в слое разреженной плазмы

Цель этой лекции состоит в том, чтобы вывести уравнение для энергии электронов в СВЧ поле при наличии упругих электрон – атомных столкновений. В лекции 14 была получена формула для скорости электрона $V_e(t)$ в однородном СВЧ поле $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t)$ при наличии упругих столкновений электрона с атомами:

$$\vec{V}_e(t) = -\frac{e\vec{E}_0}{m_e} \left[\frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2} \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega^2 + \nu^2} \cos \omega t \right] \quad (15.1).$$

Переходя от векторов к величинам, эту формулу можно «сжать» путем преобразования к виду:

$$V_e(t) = \frac{eE_0}{m_e \sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \cos(\omega t + \varphi) \equiv \frac{eE_0}{m_e \omega \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2}}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (15.2),$$

где

$$\varphi = \arcsin \frac{\nu}{\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \quad \text{или} \quad \varphi = \arccos \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \quad (15.3).$$

Формальный расчет энергии осцилляции электрона в СВЧ поле при наличии упругих столкновений электрона с атомами газа дает следующее выражение:

$$\varepsilon_e(t) = \frac{m_e V_e^2(t)}{2} = \frac{e^2 E_0^2}{2m_e(\omega^2 + \nu^2)} \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (15.4).$$

Из (15.4) видно, что осцилляторная энергия электрона с учетом столкновений всегда меньше осцилляторной энергии в отсутствие столкновений. Однако это выражение учитывает только ту часть энергии электрона, которая обусловлена прямым действием на него электрической компоненты СВЧ поля. В то же время, электроны, получившие энергию от СВЧ поля, теряют часть энергии при упругих столкновениях с атомами и, тем самым, при

каждом столкновении возникает компонента скорости электрона, отличающаяся от направления электрической компоненты СВЧ поля, т.е. после столкновения возникает частично «хаотизированная» компонента скорости. При этом, эта хаотизированная компонента скорости электрона уже не синхронизирована с осцилляциями СВЧ поля. Это означает, что при плавном выключении СВЧ поля эта хаотизированная часть энергии электронов не будет переходить обратно в энергию СВЧ поля, а сохранится в виде хаотической энергии электронов. Как видно из выражения для скорости (15.1) и (15.2), при учете частоты столкновений существенным является то, что скорость электронов и вызывающая ее осциллирующая сила СВЧ поля не находятся в синхронизме. Так, в выражении для скорости (15.1) имеется второй член, который осциллирует во времени как функция $\cos \omega t$, т.е. имеет вид, аналогичный осцилляторной скорости электрона в отсутствие столкновений. В то же самое время, первый член в выражении (15.1), пропорциональный частоте столкновений ν , осциллирует во времени как функция $\sin \omega t$, и, таким образом, эта часть скорости сдвинута по фазе на $\pi/2$ относительно второго члена. Отсутствие синхронизма в движении электрона в СВЧ поле при наличии упругих электрон – атомных столкновений хорошо видно и из выражения (15.2) по наличию сдвига фазы φ . Отсутствие синхронизма прямо связано с процессом потери части импульса электроном (см. уравнение 14.29), следовательно, с потерями части энергии электроном в результате столкновения с атомом.

В общем случае, при наличии действующей на свободный электрон электрической силы, он может начать двигаться, и эта сила при этом будет совершать работу над электроном. Совершенная работа A над электроном приводит к изменению его энергии $\Delta \mathcal{E}_e$. Величина работы, вычисляемая через скалярное произведение вектора силы $-e\vec{E}$, действующего по оси OX , и вектора смещения $\Delta \vec{R}$, определяется выражением:

$$\Delta \mathcal{E}_e = A = -e(\vec{E} \cdot \Delta \vec{R}) = -e|\vec{E}(t)| \cdot |\Delta \vec{R}| \cos \theta = -eE_x(t) \cdot \Delta x \quad (15.5),$$

где $|\Delta \vec{R}| \cdot \cos \theta = \Delta x$ есть проекция вектора смещения на направление действия электрического поля по оси OX . Разделив левую и правую части выражения (15.5) на временной интервал Δt , за который электрон смещается в пространстве на величину Δx , получим выражение для скорости изменения энергии электрона во времени $\frac{\Delta \mathcal{E}_e}{\Delta t} = -eE_x(t) \frac{\Delta x}{\Delta t}$, и, переходя от интервалов к производным, получаем уравнение:

$$\frac{d\mathcal{E}_e}{dt} = -eE_x(t) \frac{dx}{dt} = -eE_x(t)V_e(t) \quad (15.6).$$

Сначала рассмотрим случай отсутствия столкновений электрона с атомами. В отсутствие электрон – атомных столкновений в осциллирующем СВЧ поле $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$, осцилляторная скорость электрона представляется в виде

$V(t) = \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t)$, а осцилляторная энергия – соответственно

$\mathcal{E}_e = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \cos^2(\omega t)$. Тогда выражение для скорости изменения энергии

электрона в СВЧ поле рассчитывается по формуле:

$$\frac{d\mathcal{E}_e}{dt} = -eE_0 \sin(\omega t) \frac{eE_0}{m\omega} \cos(\omega t) = -\frac{e^2 E_0^2}{2m\omega} \sin(2\omega t) \quad (15.7).$$

Видно, что скорость изменения энергии осциллирует во времени с удвоенной частотой СВЧ поля, при этом энергия за четверть периода осцилляции СВЧ поля переходит от поля к электрону, а за другую четверть периода энергия электрона переходит обратно к СВЧ полю. Скорость изменения энергии электрона, усредненная по периоду СВЧ поля, определится так:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}_e}{dt} \right\rangle = -\frac{e^2 E_0^2}{2m\omega} \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0 \quad (15.8).$$

Из (15.8) видно, что в осциллирующем СВЧ поле в отсутствии столкновений средняя скорость изменения энергии электрона во времени равна нулю, т.е. энергия электрона в среднем за период СВЧ поля не изменяется.

Теперь по формуле (15.6) рассчитаем скорость изменения энергии электрона с учетом столкновений. Подставляя выражение для скорости электрона (15.1) в формулу (15.6), получаем уже отличное от (15.7) выражение:

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_e}{dt} &= -eE_0 \sin(\omega t) \left\{ -\frac{eE_0}{m_e} \left[\frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2} \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega^2 + \nu^2} \cos \omega t \right] \right\} = \\ &= \frac{e^2 E_0^2}{m_e(\omega^2 + \nu^2)} \left[\nu \sin^2(\omega t) + \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right] = \\ &= \frac{e^2 E_0^2}{m_e(\omega^2 + \nu^2)} \left[\nu \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2} \omega \sin(2\omega t) \right] \quad (15.9).\end{aligned}$$

Выражение (15.9) состоит из двух существенно отличающихся членов. Первый член выражения в квадратных скобках (15.9) является знакопостоянным. Второй член в квадратных скобках (15.9) является знакопеременным. При этом ясно, что только знакопостоянный член, который пропорционален $\nu \sin^2(\omega t)$, должен дать отличный от нуля вклад в скорость изменения энергии электрона при усреднении по периоду СВЧ поля. Вычислим этот вклад, проведя усреднение (15.9) по периоду СВЧ поля:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d\varepsilon_e}{dt} \right\rangle &= \frac{e^2 E_0^2}{m_e(\omega^2 + \nu^2)} \left[\nu \langle \sin^2(\omega t) \rangle + \frac{1}{2} \omega \langle \sin(2\omega t) \rangle \right] = \\ &= \frac{e^2 E_0^2 \nu}{2m_e(\omega^2 + \nu^2)} = \frac{e^2 E_0^2}{2m_e \omega^2} \frac{\nu}{(1 + \frac{\nu^2}{\omega^2})} \quad (15.10).\end{aligned}$$

Из (15.10) видно, что средняя скорость изменения энергии электрона в СВЧ поле при наличии столкновений является постоянной величиной, которая пропорциональна осцилляторной энергии в отсутствии столкновений,

умноженной на величину $\frac{\nu}{(1+\frac{\nu^2}{\omega^2})}$, и максимальное значение которой

составляет $\frac{1}{2}$ при $\nu = \omega$. Таким образом, при учете столкновений электрона с атомами скорость увеличения энергии, усредненная по периоду СВЧ поля, не превышает средней осцилляторной энергии электрона в отсутствии столкновений. В результате многих столкновений электрон в СВЧ поле может получить много порций средней осцилляторной энергии, и таким образом, приобрести энергию, во много раз превышающую осцилляторную. В то же время, полученная электроном от СВЧ поля энергия, в результате столкновения может быть частично передана атому. В начале процесса пока электрон не набрал большой энергии от СВЧ поля, доля передаваемой энергии электроном атому мала $\varepsilon_a \approx \frac{2m_e}{M} \varepsilon_e$ (см. лекцию 14, формулу 14.22).

На этой стадии можно пренебречь процессом передачи малой доли энергии от электрона атому при их столкновении. В этом случае среднее приращение энергии электрона в интервале времени Δt при частоте столкновений электронов ν в СВЧ поле составит величину:

$$\langle \Delta \varepsilon_e(t) \rangle = \frac{e^2 E_0^2 \nu \Delta t}{2m_e(\omega^2 + \nu^2)} \quad (15.11).$$

Величина $(\nu \cdot \Delta t)$ равна числу столкновений $N = \nu \cdot \Delta t$, которое испытал электрон с атомами в процессе движения в СВЧ поле за время Δt . Таким образом, энергия электрона, полученная им от СВЧ поля, будет пропорциональна числу произошедших электрон–атомных столкновений N за истекшее время Δt :

$$\langle \Delta \varepsilon_e(N) \rangle = \frac{e^2 E_0^2 N}{2m_e(\omega^2 + \nu^2)} \quad (15.12).$$

Из (15.12) видно, что за одно столкновение прирост энергии электрона составляет величину:

$$\langle \Delta \varepsilon_e (N=1) \rangle = \frac{e^2 E_0^2}{2m_e (\omega^2 + \nu^2)} \quad (15.13),$$

при этом полученная электроном энергия, не передается обратно к осциллирующему электрическому СВЧ полю, а сохраняется у электрона, и, далее накапливается от столкновения к столкновению. Важно, что эта, полученная от СВЧ поля электроном энергия, является уже энергией хаотического движения. Вследствие столкновений электрона с атомами вектор скорости электрона до и после столкновения меняется, т.е. меняется вектор импульса электрона как по величине, так и по направлению, и движение электрона выходит из синхронизма с осциллирующим СВЧ полем. Чтобы убедиться в этом, рассчитаем энергию, получаемую электроном в результате электрон – атомного столкновения, исходя из диаграммы рассеяния электрона при упругом столкновении с атомом (рис. 15.1):

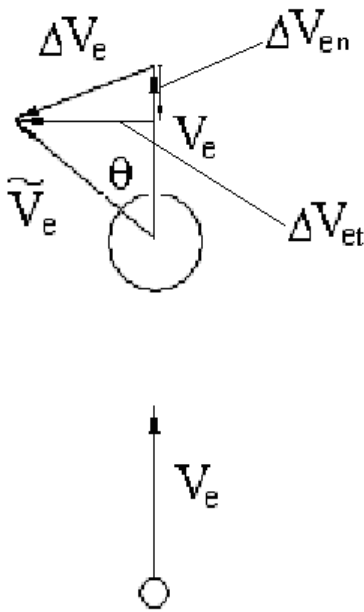


Рис. 15.1. Диаграмма скоростей упругого рассеяния электрона на атоме. $\vec{V}_e$ – скорость электрона до столкновения с атомом, $\vec{\tilde{V}}_e$ – скорость электрона после столкновения с атомом, θ – угол между вектором скорости электрона после столкновения, относительно его первоначальной скорости, $\Delta \vec{V}_e$ – изменение вектора скорости электрона вследствие его упругого столкновения с атомом, $\Delta \vec{V}_{en}$ – нормальная компонента вектора $\Delta \vec{V}_e$, $\Delta \vec{V}_{et}$ – тангенциальная компонента вектора $\Delta \vec{V}_e$.

Изменение вектора скорости электрона $\Delta \vec{V}_e$ вследствие его упругого столкновения с атомом представляет собой разность между вектором рассеянной скорости электрона $\vec{\tilde{V}}_e$ и вектором первоначальной скорости электрона $\vec{V}_e$, которую он имел до акта рассеяния:

$$\Delta \vec{V}_e = \vec{\tilde{V}}_e - \vec{V}_e \quad (15.14).$$

С другой стороны, изменение вектора скорости электрона $\Delta \vec{V}_e$ можно представить в виде двух ортогональных компонент: нормальной компоненты $\Delta \vec{V}_{en}$, представляющей собой проекцию вектора $\Delta \vec{V}_e$ на ось, совпадающую с направлением вектора первоначальной скорости $\vec{V}_e$, и тангенциальную компоненту $\Delta \vec{V}_{et}$, представляющую собой проекцию вектора $\Delta \vec{V}_e$ на ось, перпендикулярную направлению первоначальной скорости электрона:

$$\Delta \vec{V}_e = \Delta \vec{V}_{en} + \Delta \vec{V}_{et} \quad (15.15).$$

Изменению скорости соответствует изменение импульса электрона $\Delta \vec{p}_e$:

$$\Delta \vec{p}_e = m \Delta \vec{V}_e = m \Delta \vec{V}_{en} + m \Delta \vec{V}_{et} \quad (15.16).$$

Изменение энергии электрона рассчитаем по формуле:

$$\Delta \mathcal{E}_e = \frac{(\Delta \vec{p})^2}{2m} = \frac{m(\Delta \vec{V}_e)^2}{2} = \frac{m}{2} \left[(\Delta \vec{V}_{en})^2 + 2\Delta \vec{V}_{en} \Delta \vec{V}_{et} + (\Delta \vec{V}_{et})^2 \right] \quad (15.17).$$

Учитывая, что второй член в квадратных скобках (15.17) равен нулю, т.к. представляет собой скалярное произведение двух ортогональных векторов, и, имея в виду, что величины скоростей электрона до и после столкновения мало отличаются по величине $|\vec{V}_e| \approx |\vec{\tilde{V}}_e|$, так как величина скорости электрона

при столкновении с атомом из-за большой разнице в массах изменяется на очень малую величину, то выражение для изменения энергии электрона за одно его столкновение с атомом преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_e &= \frac{m}{2} \left[(\Delta \vec{V}_{en})^2 + (\Delta \vec{V}_{et})^2 \right] = \frac{m}{2} \left[(\vec{V}_e - \vec{\tilde{V}}_e \cos \theta)^2 + (\vec{\tilde{V}}_e \sin \theta)^2 \right] \approx \\ &\approx \frac{m}{2} \vec{V}_e^2 \left[(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \right] = \frac{m}{2} \vec{V}_e^2 \left[1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right] = \\ &= m \vec{V}_e^2 (1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (15.18).$$

Полагая, что это изменение энергии электрона произошло за время между столкновениями $\Delta t = \tau_{ea}$, деля левую и правую части выражения (15.18) на время между столкновениями, и, переходя к непрерывным производным, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\Delta \varepsilon_e}{\tau_{ea}} = \frac{\Delta \varepsilon_e}{\Delta t} \approx \frac{d\varepsilon_e}{dt} = \frac{m\vec{V}_e^2(1-\cos\theta)}{\tau_{ea}} = m\vec{V}_e^2 \nu \quad (15.19),$$

где введено обозначение частоты столкновений электрона с атомами или ионами плазмы $\nu = \frac{(1-\cos\theta)}{\tau_{ea}}$.

Подставляя в правую часть уравнения (15.19) выражение для скорости электрона (15.1), получаем следующее уравнение для изменения энергии электрона в СВЧ поле при наличии электрон – атомных столкновений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_e}{dt} &= \frac{e^2 E_0^2}{m_e} \nu \left[\frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2} \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega^2 + \nu^2} \cos \omega t \right]^2 \\ \frac{d\varepsilon_e}{dt} &= \frac{e^2 E_0^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)^2} \left[\nu^2 \sin^2 \omega t - 2\nu\omega \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \omega^2 \cos^2 \omega t \right] \end{aligned} \quad (15.20).$$

В правой части уравнения (15.20) в квадратных скобках имеются знакопостоянные и знакопеременные члены, усреднение которых по периоду СВЧ поля приводит к тому, что среднее значение второго члена равно нулю, а средние значения первого и третьего членов равны соответственно $\frac{1}{2}\nu^2$ и $\frac{1}{2}\omega^2$. Учитывая это, окончательно получаем из (15.20) уравнение для производной по времени энергии электрона с учетом упругих электрон – атомных столкновений в виде:

$$\frac{d\varepsilon_e}{dt} = \frac{e^2 E_0^2 \nu}{2m_e (\omega^2 + \nu^2)} \quad (15.21).$$

Формула (15.21), полученная из диаграммы столкновения электрона с атомом, совпадает с формулой (15.10), однако из диаграммы видно, что вектор импульса электрона в результате столкновения сильно изменяется по

направлению, что и свидетельствует о выходе движения электрона из синхронизма с СВЧ полем в результате столкновений. Таким образом, как из диаграммы импульсов рассеиваемого на атоме электрона, так и из расчета работы силы «трения», возникающей при столкновениях электрона с атомами фонового газа, получается идентичные уравнения (15.21) и (15.10), описывающие увеличение хаотизированной энергии электрона в СВЧ поле при наличии электрон – атомных столкновений.

Теперь учтем, что при упругом столкновении электрона с атомом малая часть энергии электрона все же передается атому. В предположении, что скорость атома существенно меньше скорости электрона, соотношение массы электрона m_e и массы атома M таково, что $\frac{m_e}{M} \ll 1$, доля энергии электрона, передаваемой атому при одном столкновении, составляет известную величину ξ (см. вывод выражения 14.22. в лекции 14):

$$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_e} = 2 \frac{m_e}{M} = \xi \quad \text{или} \quad \varepsilon_a = 2 \frac{m_e}{M} \varepsilon_e = \xi \varepsilon_e \quad (15.22).$$

Таким образом, при столкновении атом приобретает часть энергии электрона, а электрон, соответственно, теряет малую часть своей энергии. Потери энергии электроном при каждом столкновении с атомом определяются выражением (15.22) $\Delta \varepsilon_e = \xi \varepsilon_e$. За N столкновений (при частоте ν в интервале времени Δt) потери электроном энергии составят величину $\Delta \varepsilon_e(N) = \xi \varepsilon_e N = \xi \varepsilon_e \nu \Delta t$. Скорость передачи энергии от электрона

атому составит $\frac{\Delta \varepsilon_e(N)}{\Delta t} \approx \frac{d \varepsilon_e}{dt} = \xi \varepsilon_e \nu$. Вычитая эту величину потерь энергии электрона из правой части уравнения (15.21), получаем усредненное уравнение, описывающее увеличение хаотической энергии электрона в СВЧ поле при наличии упругих электрон – атомных столкновений с учетом передачи части энергии от электрона атомам:

$$\frac{d\varepsilon_e}{dt} = \frac{e^2 E_0^2 \nu}{2m_e(\omega^2 + \nu^2)} - \nu \xi \varepsilon_e = \frac{e^2 E_0^2 \nu}{2m_e(\omega^2 + \nu^2)} - 2 \frac{m_e}{M} \nu \varepsilon_e \quad (15.23).$$

В правой части дифференциального уравнения (15.23) имеются два члена: первый описывает передачу энергии от СВЧ поля электрону при наличии столкновений, второй член описывает потери энергии электроном через передачу части своей энергии атому в процессе столкновения электрона с атомом. Уравнение (15.23) имеет точное аналитическое решение:

$$\varepsilon_e(t) = \frac{e^2 E_0^2}{2m_e(\omega^2 + \nu^2)} \cdot \frac{M}{2m_e} \left[1 - \exp\left(-2 \frac{m_e}{M} \nu t\right) \right] \quad (15.24).$$

Проанализируем поведение этого решения во времени в зависимости от соотношения входящих в него параметров. При малых временных интервалах, или при малых частотах столкновений, когда показатель экспоненты мал (параметр $2 \frac{m_e}{M} \nu t \ll 1$), экспоненту в квадратных скобках

можно разложить по этому малому параметру $(2 \frac{m_e}{M} \nu t)$:

$\left[1 - \exp\left(-2 \frac{m_e}{M} \nu t\right) \right] \approx 1 - 1 + 2 \frac{m_e}{M} \nu t = 2 \frac{m_e}{M} \nu t$ Тогда приближенное решение (15.24) для этого случая можно записать в виде:

$$\varepsilon_e(t) \approx \frac{e^2 E_0^2}{2m_e(\omega^2 + \nu^2)} \nu t \quad (15.25).$$

Это решение соответствует временам $t^* \ll \frac{M}{2m_e \nu}$, когда электрон еще не успел набрать значительную энергию. Для временного интервала $[0, t^*]$ при упругих столкновениях электрона с атомами от электрона будет передаваться очень малая величина энергии, которая в решении (15.24) может быть пренебрежимо мала: второй член мал по сравнению с первым. Это также означает, что произошедшее к этому моменту времени число столкновений

много меньше величины отношения массы атома к удвоенной массе электрона:

$$N = \nu t \ll \frac{M}{2m_e} \quad (15.26).$$

В обратном пределе, когда число произошедших столкновений велико, т.е. величина N и частота столкновений соотносятся как:

$$N = \nu t \gg \frac{M}{2m_e} \quad (15.27),$$

тогда экспонента в квадратных скобках решения (15.24) приближается к нулю, а величина всего множителя в квадратных скобках приближается к 1, то получаем установившееся во времени решение уравнения (15.24) в виде:

$$\mathcal{E}_e(t \rightarrow \infty) \approx \frac{e^2 E_0^2}{2m_e(\omega^2 + \nu^2)} \frac{M}{2m_e} \quad (15.28).$$

Такой характер изменения хаотической энергии электрона во времени в СВЧ поле при учете столкновений обусловлен тем, что в начале процесса набранная электроном энергия невелика, а доля этой энергии, передаваемая атому мала $\mathcal{E}_a = 2 \frac{m_e}{M} \mathcal{E}_e$. В этот начальный интервал времени энергия от СВЧ поля передается в основном электрону, у которого нарастает доля хаотической энергии, а доля передаваемой энергии от электрона атомам не значительна в общем балансе энергии. С увеличением энергии хаотического движения электрона возрастает и передаваемая энергия от электрона к атомам при каждом столкновении. С течением времени передаваемая от электрона к атому энергия становится примерно равной энергии, получаемой электроном от СВЧ электрического поля. И энергия электрона практически перестает расти, т.е. приближается к стационарному значению (15.28).

Из уравнения (15.23) можно получить полезную формулу для расчета поглощения СВЧ излучения в редкой плазме при наличии доминирующих упругих электрон – атомных столкновений. Действительно, первый член в правой части уравнения соответствует процессу передачи энергии от СВЧ

поля к электронам, которые тем самым обеспечивают затухание СВЧ поля по мере распространения СВЧ излучения в такой плазме. Второй член в правой части уравнения соответствует уже следующему процессу передачи части энергии, полученной электроном от СВЧ поля, атому. Таким образом, поглощение СВЧ излучения обусловлено только первым членом. Тогда, умножая левую и правую части на объемную плотность электронов плазмы n_e , получим выражение для удельной СВЧ мощности P_{av} , поглощенной электронами плазмы в единице объема:

$$P_{av} = n_e \frac{d\mathcal{E}_e}{dt} = \frac{n_e e^2 E_0^2 \nu}{2m_e(\omega^2 + \nu^2)} = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e(\omega^2 + \nu^2)} \frac{E_0^2}{2} \quad (15.29).$$

Учитывая, что мы имеем дело с осциллирующим электрическим полем $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$, то введем понятие эффективного значения поля так:

$$\langle E^2(t) \rangle = E_0^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{E_0^2}{2} = E_{ef}^2. \quad \text{Это понятие аналогично понятию}$$

эффективного значения переменного напряжения в электротехнике: эффективное значение U_{ef} переменного напряжения $U_0 \sin(\omega t)$ это такое значение постоянного напряжения, которое по произведенному тепловому эффекту на омической нагрузке R эквивалентно действующему переменному напряжению, усредненному по периоду осцилляций:

$$\frac{U_{ef}^2}{R} = \frac{U_0^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle}{R} = \frac{U_0^2}{2R} \Rightarrow U_{ef}^2 = \frac{U_0^2}{2} \Rightarrow U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Из этого получаем выражение, связывающее эффективное значение электрического поля E_{ef} и амплитуды электрического СВЧ поля E_0 :

$$E_{ef} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}; \quad E_{ef}^2 = \frac{E_0^2}{2} \quad (15.30).$$

Тогда из (15.29) с учетом (15.30) получаем формулу для расчета высокочастотной электропроводности σ слабоионизованной плазмы с учетом электрон – атомных столкновений:

$$P_{av} = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \frac{E_0^2}{2} = \sigma E_{ef}^2 = \sigma \frac{E_0^2}{2},$$

(15.31).

и

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)}$$

Рассмотрим поведение электропроводности плазмы σ в зависимости от соотношения частоты СВЧ поля ω и частоты столкновений ν . При малых частотах столкновений, когда $\nu \ll \omega$, высокочастотная электропроводность σ плазмы с концентрацией электронов n_e определяется выражением:

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \approx \frac{n_e e^2 \nu}{m_e \omega^2} \quad (15.32).$$

При больших частотах столкновений, когда $\nu \gg \omega$, из (15.31) получаем известное из физической электроники выражение для электропроводности слабоионизованной плазмы в постоянных или медленно меняющихся полях:

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \approx \frac{n_e e^2}{m_e \nu} \quad (15.33).$$

Полученное выражение (15.33) представляет собой частный случай выражения для электропроводности слабоионизованной плазмы в переменном электрическом поле с очень малой частотой колебаний по сравнению с частотой столкновений, и подтверждает верность подхода и сделанных допущений, позволивших получить более общее выражение (15.31) для электропроводности слабоионизованной плазмы в переменном электрическом поле. При этом следует отметить, что формулу (15.33) можно обобщить и на кулоновские столкновения, т.к. ранее в диаграммах и выводах уравнений не конкретизировался характер взаимодействия электрона с тяжелой частицей – атомом или ионом, важно было, что эти столкновения упругие.

Далее на основании полученных выше выражений получим формулу для расчета поглощения СВЧ излучения по мере распространения в плазме.

Известно, что при прохождении электромагнитного излучения (включая диапазоны СВЧ, инфракрасного, видимого, ультрафиолетового и даже рентгеновского излучения) через слабо поглощающую среду, уменьшение интенсивности распространяющегося через среду излучения $\Delta I(z)$ при прохождении расстояния Δz описывается уравнением Бугера–Ламберта:

$$\begin{aligned}\Delta I(z) &\approx -\mu I(z) \Delta z \\ \frac{\Delta I(z)}{\Delta z} &\approx \frac{dI(z)}{dz} = -\mu I(z)\end{aligned}\tag{15.34},$$

здесь μ является постоянной величиной и не зависит от интенсивности СВЧ излучения (в научной литературе такие среды называются «линейными»). Этот закон может быть обобщен и для плазмы. Величина μ в (15.34) имеет размерность, обратную длине ($[\mu] = \text{см}^{-1}$). Таким образом, в правой части уравнения стоит объемная плотность энергии СВЧ излучения, поглощенная плазмой. С другой стороны, из уравнения (15.29) известна величина поглощаемой плазмой мощности в единице объема. Тогда, приравнявая правую часть уравнения (15.34) правой части уравнения (15.29), получаем выражение для вычисления параметра μ :

$$\mu I = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \frac{E_0^2}{2}\tag{15.35}.$$

Используя выражение интенсивности СВЧ излучения I через квадрат амплитуды электрического поля $I = \frac{E_0^2}{8\pi} c$, получаем из (15.35) формулу для μ и выражение для μ с числовым коэффициентом при подстановке фундаментальных постоянных (π , e^2 , c , m_e):

$$\mu = \frac{4\pi n_e e^2 \nu}{m_e c (\omega^2 + \nu^2)} \approx \frac{0.106 n_e \nu}{(\omega^2 + \nu^2)}\tag{15.36},$$

здесь величина μ имеет размерность см^{-1} , концентрация плазмы n_e имеет размерность см^{-3} , и, соответственно, размерности величин V и ω – это обратная величина секунды с^{-1} .

Далее, для расчета коэффициентов поглощения СВЧ излучения в слое плазмы, найдем решение уравнения (15.34):

$$I_{tr}(z) = I_0 \exp(-\mu z) \quad (15.37),$$

где I_0 – интенсивность СВЧ излучения, падающего на границу слоя, а $I_{tr}(z)$ – интенсивность СВЧ излучения, прошедшего через плазменный слой толщиной z . Коэффициент прохождения K_{tr} СВЧ излучения через слой толщиной z определяется как отношение интенсивности прошедшего через слой СВЧ излучения $I_{tr}(z)$ к интенсивности падающего СВЧ излучения I_0 :

$$K_{tr} = \frac{I_{tr}(z)}{I_0} = \exp(-\mu z) \quad (15.38).$$

Величина интенсивности $I_{ab}(z)$ поглощенного СВЧ излучения в плазменном слое толщиной z определится как разность падающей I_0 и прошедшей через слой $I_{tr}(z)$ интенсивностей:

$$I_{ab}(z) = I_0 - I_{tr}(z) = I_0 [1 - \exp(-\mu z)] \quad (15.39).$$

Коэффициент поглощения можно рассчитать как отношение части интенсивности поглощенного СВЧ излучения $I_{ab}(z)$ в слое толщиной z к интенсивности падающего СВЧ излучения I_0 :

$$K_{ab} = \frac{I_{ab}(z)}{I_0} = 1 - \exp(-\mu z) \quad (15.40).$$

Полученные формулы для расчета поглощения и прохождения СВЧ излучения через слой плазмы справедливы для плазмы небольшой плотности, когда волновое число и длина волны СВЧ излучения в плазме изменяется незначительно по сравнению с волновым числом и длиной волны излучения в вакууме или в воздухе. Точный критерий применимости

полученного решения уравнения Бугера–Ламберта будет представлен в лекции 18 на основании решения волнового уравнения, описывающего распространение СВЧ волны в плазме с учетом дисперсии волн.

Задача 15.1.

Рассчитать хаотическую энергию электронов в потоке СВЧ излучения с интенсивностью $I=10^7$ Вт/см², длиной волны $\lambda=3$ см, в конце импульса длительностью $\tau_1=50$ нс в молекулярном водороде при давлении $p=10^{-4}$ Тор. Рассчитать возможное стационарное значение энергии электронов. Рассчитать длительность импульса СВЧ τ_2 , необходимую для достижения электроном энергии, равной 63% от стационарного значения энергии.

Решение задачи 15.1.

Рассчитаем частоту столкновений ν электрона с молекулами газа (водорода) при заданном давлении по следующей формуле:

$$\nu = 5 \cdot 10^9 p \approx 5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$$

Круговая частота СВЧ поля ω составляет величину:

$$\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda} \approx 2 \cdot 3.14 \cdot \frac{3 \cdot 10^{10}}{3} \approx 6.28 \cdot 10^{10} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1} \gg \nu$$

Таким образом, частота столкновений ν оказывается существенно ниже круговой частоты СВЧ поля ω .

Рассчитаем величину параметра, входящего в показатель экспоненты (15.24), для момента времени $t=\tau_1=50$ нс, соответствующего окончанию СВЧ импульса:

$$2 \frac{m_e}{M} \nu t \approx \frac{2m_e}{2 \cdot 1840 m_e} \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-8} \approx 1.36 \cdot 10^{-5} \ll 1$$

Таким образом, длительность импульса СВЧ излучения $\tau_1=50$ нс такова, что параметр, стоящий в показателе экспоненты решения (15.24) является малым.

Значение энергии электрона в момент $t = \tau_1 = 50$ нс $\mathcal{E}_e(t = \tau_1)$ и стационарную энергию $\mathcal{E}_e(t \rightarrow \infty)$ рассчитаем по (15.25) и (15.28):

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_e(t = \tau_1) &= \frac{e^2 E_0^2}{2m_e(\omega^2 + \nu^2)} \nu t \approx \frac{e^2 E_0^2}{2m_e \omega^2} \nu t \approx \frac{e^2 8\pi I}{2m_e c \omega^2} \nu t \approx \\ &\approx \frac{23 \cdot 10^{-20} \cdot 8 \cdot 3.14 \cdot 10^7 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 39.4 \cdot 10^{20} \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}} \text{ эВ} \approx 42 \text{ эВ} \\ \mathcal{E}_e(t \rightarrow \infty) &= \frac{e^2 E_0^2}{2m_e(\omega^2 + \nu^2)} \cdot \frac{M}{2m_e} = \frac{e^2 \cdot 8\pi I}{2m_e \omega^2 c} \cdot \frac{M}{2m_e} \approx \\ &\approx \frac{23 \cdot 10^{-20} \cdot 8 \cdot 3.14 \cdot 10^7 \cdot 10^7 \cdot 1840}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 39.4 \cdot 10^{20} \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}} \approx 3 \text{ МэВ}\end{aligned}$$

Определим длительность импульса СВЧ τ_2 , при которой энергия электрона достигает 63% от энергии стационарного значения, при этом выражение

$$\left[1 - \exp\left(-2 \frac{m_e}{M} \nu t\right) \right], \text{ входящее в формулу (15.24), должно составлять}$$

величину 0.63:

$$\begin{aligned}1 - \exp\left(-2 \frac{m_e}{M} \nu \tau_2\right) &= 0.63; \quad 2 \frac{m_e}{M} \nu \tau_2 = \ln(1 - 0.63)^{-1} \approx 1 \\ \tau_2 &\approx \frac{M}{2m_e \nu} \approx \frac{2 \cdot 1840 m_e}{2m_e} \cdot \frac{1}{5 \cdot 10^5} \approx 3.68 \cdot 10^{-3} \text{ с} \approx 3.68 \text{ мс}\end{aligned}$$

При длительности СВЧ импульса $\tau_2 \approx 3.68$ мс электрон наберет 63% от установившейся стационарной энергии, и величина хаотической энергии электрона без учета релятивистских эффектов формально определится из формулы (15.28):

$$\mathcal{E}_e(t = \tau_2) \approx \frac{e^2 E_0^2}{2m_e(\omega^2 + \nu^2)} \frac{M}{2m_e} [1 - \exp(-1)] \approx \frac{e^2 \cdot 8\pi I}{2m_e \omega^2 c} \cdot \frac{M}{2m_e} \cdot 0.63 \approx 1.9 \text{ МэВ}$$

Задача 15.2.

Рассчитать коэффициент прохождения через плазменный слой мощности СВЧ излучения для разных длин волн. Концентрация электронов в

слое составляет постоянную величину $n_e=4\cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ при давлении воздуха $p=2 \text{ Тор}$. Толщина слоя плазмы $L=20 \text{ см}$, длины волн СВЧ излучения $\lambda=15\text{см}, 5\text{см}, 2\text{см}$. Отражением СВЧ излучения от границы плазмы пренебречь. Рассмотреть также случай расположения за слоем плазмы металлической плоскости, отражающей от своей поверхности всю дошедшую до пластины СВЧ мощность, и рассчитать отражение СВЧ мощности от конструкции: металла с закрывающим его плазменным слоем.

Решение задачи 15.2.

Величина частоты столкновений электронов с атомами воздуха определяется так $\nu \approx 5\cdot 10^9 p \approx 10^{10} \text{ с}^{-1}$. Круговые частоты микроволновых излучений с длинами волн $\lambda_1=15 \text{ см}$, $\lambda_2=5 \text{ см}$, $\lambda_3=2 \text{ см}$ равны соответственно:

$$\omega_1 = 2\pi \frac{c}{\lambda_1} \approx 2\cdot 3.14 \cdot \frac{3\cdot 10^{10}}{15} \approx 1.26\cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$$

$$\omega_2 = 2\pi \frac{c}{\lambda_2} \approx 2\cdot 3.14 \cdot \frac{3\cdot 10^{10}}{5} \approx 3.77\cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}.$$

$$\omega_3 = 2\pi \frac{c}{\lambda_3} \approx 2\cdot 3.14 \cdot \frac{3\cdot 10^{10}}{2} \approx 9.42\cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$$

Частоты ω_1 и ν соизмеримы, поэтому в расчетах коэффициента поглощения СВЧ излучения с длиной волны $\lambda_1=15 \text{ см}$ в слое плазмы будем учитывать как ω_1 так и ν . Частоты ω_2 и ω_3 заметно больше частоты столкновений ν , квадраты этих частот уже существенно превосходят квадрат частоты столкновений. Поэтому, если в расчетах коэффициента поглощения в плазме СВЧ излучения с длиной волны $\lambda_2=5 \text{ см}$, можно учесть частоту столкновений в качестве малой поправки, то для СВЧ излучения с длиной волны $\lambda_3=2 \text{ см}$ уже можно полностью пренебречь квадратом частоты столкновений ν по сравнению с квадратом частоты ω_3 . Коэффициент

прохождения СВЧ излучения через слой плазмы толщиной L равен

$$K_{tr} = \frac{I_{tr}(L)}{I_0} = \exp(-\mu L). \text{ Рассчитаем значения параметров } \mu_1, \mu_2, \mu_3 \text{ для}$$

частот СВЧ излучения:

$$\mu_1 \approx \frac{0.106 n_e \nu}{(\omega_1^2 + \nu^2)} \approx \frac{0.106 \cdot 4 \cdot 10^{10} \cdot 10^{10}}{(1.58+1) \cdot 10^{20}} \approx 0.164 \text{ см}^{-1},$$

$$\mu_2 \approx \frac{0.106 n_e \nu}{(\omega_2^2 + \nu^2)} \approx \frac{0.106 \cdot 4 \cdot 10^{10} \cdot 10^{10}}{(14.2+1) \cdot 10^{20}} \approx 0.028 \text{ см}^{-1},$$

$$\mu_3 \approx \frac{0.106 n_e \nu}{(\omega_3^2 + \nu^2)} \approx \frac{0.106 \cdot 4 \cdot 10^{10} \cdot 10^{10}}{88.74 \cdot 10^{20}} \approx 0.0048 \text{ см}^{-1}.$$

Значения параметров μ и величину толщины слоя плазмы $L=20$ см подставляем в формулу для расчета коэффициентов прохождения:

$$K_{tr}(\lambda_1 = 15 \text{ см}) = \exp(-\mu_1 L) \approx 0.0376$$

$$K_{tr}(\lambda_2 = 5 \text{ см}) = \exp(-\mu_2 L) \approx 0.57$$

$$K_{tr}(\lambda_3 = 2 \text{ см}) = \exp(-\mu_3 L) \approx 0.91$$

При расположении металла с 100% отражением за слоем плазмы, коэффициенты отражения от такой системы для различных K_{ref} длин волн можно рассчитать по формуле расчета коэффициента прохождения, полагая, что СВЧ излучение проходит плазменный слой дважды, т.е. в формуле для коэффициента прохождения надо вставить удвоенную длину $2L$ плазменного слоя:

$$K_{ref}(\lambda_1 = 15 \text{ см}) = K_{tr}(2L, \lambda_1) = \exp(-2\mu_1 L) \approx 0.00141 \approx 0.14\%$$

$$K_{ref}(\lambda_2 = 5 \text{ см}) = K_{tr}(2L, \lambda_2) = \exp(-2\mu_2 L) \approx 0.32 \approx 32\%$$

$$K_{ref}(\lambda_3 = 2 \text{ см}) = K_{tr}(2L, \lambda_3) = \exp(-2\mu_3 L) \approx 0.83 \approx 83\%$$

Таким образом, слой слабоионизованной плазмы толщиной 20 см с концентрацией электронов $n_e = 4 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ может эффективно поглощать СВЧ излучение дециметрового диапазона длин волн, в то время как сантиметровое излучение поглощается в таком слое существенно слабее.

Лекция 16. Электропроводность и диэлектрическая проницаемость однородной плазмы в СВЧ поле

Цель этой лекции состоит в том, чтобы вывести формулу для электрической проводимости (электропроводности) и диэлектрической проницаемости однородной в пространстве плазмы в СВЧ поле $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cdot \sin(\omega t)$. Для вывода формул будем использовать полученное ранее выражение скорости электронов $\vec{V}_e(t)$ в СВЧ полях при наличии столкновений электронов с атомами и ионами (14.37):

$$\vec{V}_e(t) = -\frac{e\vec{E}_0}{m_e} \left[\frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega^2 + \nu^2} \cos(\omega t) \right] \quad (16.1).$$

В слабоионизованной плазме с объемной плотностью электронов n_e величина плотности электрического тока $\vec{j}(t)$ может быть выражена через величину скорости электронов $\vec{V}_e(t)$ на основе известной формулы электродинамики сплошных сред:

$$\vec{j}(t) = -en_e \vec{V}_e(t) \quad (16.2).$$

Подставляя (16.1) в (16.2), получаем следующее выражение для плотности электрического тока в плазме:

$$\begin{aligned} \vec{j}(t) &= -en_e \left\{ -\frac{e\vec{E}_0}{m_e} \left[\frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega^2 + \nu^2} \cos(\omega t) \right] \right\} = \\ &= \frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \vec{E}_0 \sin(\omega t) - \frac{n_e e^2}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \omega \vec{E}_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (16.3).$$

Далее учтем, что первый член выражения прямо пропорционален осциллирующей во времени величине электрической компоненты СВЧ поля $\vec{E}(t)$, а второй член можно выразить через производную электрической

компоненты этого СВЧ поля $\frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{E}_0 \sin(\omega t) \right] = \omega \vec{E}_0 \cos(\omega t) \quad (16.4).$$

Учитывая (16.4) можно представить выражение (16.3) для плотности электрического тока в плазме в следующем виде:

$$j(t) = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} E(t) - \frac{n_e e^2}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \frac{\partial E(t)}{\partial t} \quad (16.5).$$

Из (16.5) видно, что высокочастотный осциллирующий в плазме ток, возбуждаемый высокочастотным электрическим полем $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cdot \sin(\omega t)$, при наличии столкновений электронов с атомами и ионами состоит из двух частей, – одна часть высокочастотного тока осциллирует синхронно с высокочастотным электрическим СВЧ полем, а другая часть осциллирует синхронно с производной по времени этого высокочастотного электрического поля $\frac{\partial E(t)}{\partial t}$.

Для анализа выражения (16.5) предварительно рассмотрим уравнение Максвелла для электропроводной немагнитной среды, в котором связываются ротор магнитной компоненты $\vec{H}$ СВЧ поля с электрическим током проводимости $\vec{j}_\sigma$ и производной электрической индукции $\vec{D}$ в среде:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \left\{ \vec{j}_\sigma + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\} \quad (16.6),$$

где ток проводимости $\vec{j}(t)$ может быть выражен через величину электропроводности среды σ и электрическое поле $\vec{E}(t)$:

$$\vec{j}(t) = \vec{j}_\sigma = \sigma \vec{E}(t) \quad (16.7).$$

Для случая вакуума в отсутствии свободных и связанных зарядов уравнение Максвелла будет иметь вид:

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{dc-vac} \quad (16.8),$$

где величина в квадратных скобках обозначена как ток смещения в вакууме $\vec{j}_{dc-vac}$ (displacement current in vacuum). В правой части уравнения (16.6) в круглых скобках присутствуют два члена: ток проводимости $\vec{j}_\sigma$ и так называемый полный ток смещения в среде $\vec{j}_{dc-mf}$, в который включен как ток смещения среды, так и ток смещения в вакууме, т.е. полный ток смещения $\vec{j}_{dc-mf}$:

$$\vec{j}_{dc-mf} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (16.9).$$

Ток смещения в среде обусловлен смещением от положения равновесия существующих в среде связанных зарядов, например, электронных оболочек атома относительно положительного ядра, или смещением электронов, связанных кулоновскими силами с положительно заряженными ионами, находящимися в узлах кристаллической решетки. Ток смещения в вакууме $\vec{j}_{dc-vac}$ в отсутствии материальной среды можно интерпретировать аналогично току смещения в среде, который связан со смещением «виртуальных» зарядов вакуума под действием внешнего переменного электрического поля (этот процесс можно было бы назвать «электрической поляризацией вакуума»). То, что ток смещения в вакууме существует, а трение при смещении виртуальных зарядов отсутствует, подтверждается экспериментально тем, что электромагнитные волны в вакууме существуют и распространяются без затухания:

$$\vec{j}_{dc-vac} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (16.10).$$

Смещение реальных или виртуальных зарядов среды (вакуум) обуславливает процесс поляризации среды под воздействием внешнего электрического поля, и связанный с этим процессом поляризации кратковременный электрический ток, проходящий по непроводящей диэлектрической среде в быстропеременном или импульсном электрическом поле. Как известно из

электродинамики сплошных сред, в простейших случаях вектор электрической индукции $\vec{D}$ связан с внешним вектором электрического поля $\vec{E}$ и вектором электрической поляризации среды $\vec{P}$ следующим образом:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (16.11).$$

Для простых линейных сред, электрические характеристики которых не зависят от величины внешнего электрического поля, величина поляризации среды пропорциональна внешнему электрическому полю:

$$\vec{P} = \chi\vec{E} \quad (16.12),$$

где χ называется коэффициентом поляризации среды, которая для линейных сред является постоянной величиной. Учитывая (16.12), вектор электрической индукции может быть представлен так:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E} + 4\pi\chi\vec{E} = (1 + 4\pi\chi)\vec{E} = \varepsilon\vec{E} \quad (16.13),$$

где введенная величина ε называется диэлектрической проницаемостью среды, при этом связь ε и χ выражается формулами:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi, \quad \chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \quad (16.14)$$

Диэлектрическая проницаемость среды ε может быть измерена экспериментально как отношение величины электрической индукции $\vec{D}$ к величине внешнего электрического поля $\vec{E}$. Во многих справочниках имеются базы данных ε для большинства веществ, помещаемых в постоянные и переменные электрические поля различных частот (см. например, книгу А. Хиппель «Диэлектрики и их применение»). Учитывая (16.12) и (16.14), вектор электрической поляризации среды $\vec{P}(t)$ может быть выражен через диэлектрическую проницаемость ε и внешнее электрическое поле $\vec{E}(t)$ следующим образом:

$$\vec{P}(t) = \chi\vec{E}(t) = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E}(t) \quad (16.15).$$

Основываясь на выше изложенном подходе, определим вклад непосредственно среды в ток смещения $\vec{j}_{dc-m}$, вычтя вакуумный ток смещения $\vec{j}_{dc-vac}$ из полного тока смещения $\vec{j}_{dc-mf}$:

$$\begin{aligned}\vec{j}_{dc-m} &= \vec{j}_{dc-mf} - \vec{j}_{dc-vac} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon-1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (16.16).$$

Сравнивая (16.15) с (16.16) видно, что ток смещения, непосредственно связанный со средой $\vec{j}_{dc-m}$, равен производной по времени электрической поляризации среды $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\epsilon-1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Просуммируем ток проводимости и ток смещения среды, тогда получим следующую формулу для полного тока, связанного только со средой $\vec{j}_{mtot}$:

$$\vec{j}_{mtot} = \vec{j}_{\sigma} + \vec{j}_{dc-m} = \sigma \vec{E} + \frac{\epsilon-1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\quad (16.17).$$

Из (16.17) видно, что полный электрический ток, непосредственно связанный со средой, состоит из двух членов. Первый член (16.17) описывает ток, обусловленный электрической проводимостью σ среды (связан с перемещением свободных зарядов) и пропорционален электрическому полю $\vec{E}(t)$, а второй член описывает поляризацию среды, и этот ток пропорционален производной электрического поля по времени $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t)$.

Сравним выражение для полного тока среды в переменном электрическом поле (16.17), полученное из электродинамики сплошных сред, с выражением для полного электрического тока в слабоионизованной плазме в переменном электрическом поле (16.5), которое было получено из уравнения движения электронов плазмы в осциллирующем электрическом поле с учетом столкновений электронов с атомами:

$$\begin{aligned}\vec{j}_{tot}(t) &= \sigma \vec{E}(t) + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \\ \vec{j}(t) &= \frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \vec{E}(t) - \frac{n_e e^2}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}\end{aligned}\quad (16.18).$$

Из сравнения первого и второго выражения (16.18) убеждаемся в их полной аналогии по структуре. А так как оба подхода эквивалентны, то можно утверждать, что выражения для коэффициентов, стоящих перед напряженностью электрического поля $\vec{E}(t)$ и производной поля по времени $\frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}$ тождественны. Тогда из (16.18) получаем следующее выражение для электропроводности плазмы σ_{pe} :

$$\sigma_{pe} = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \quad (16.19),$$

и, соответственно, выражение для диэлектрической проницаемости плазмы ε_{pe} :

$$\varepsilon_{pe} = 1 - \frac{4\pi n_e e^2}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \quad (16.20).$$

В дальнейшем индексы при буквах, обозначающих электропроводность и диэлектрическую проницаемость плазмы будем опускать.

Выражения (16.19) и (16.20) можно преобразовать, выразив их через характерные частоты: частоту СВЧ поля ω , частоту столкновений электронов ν и частоту собственных электронных колебаний однородной изотропной плазмы – электронную частоту Ленгмюра ω_{pe} :

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e} \quad (16.21).$$

Тогда формулы для электропроводности и диэлектрической проницаемости однородной слабоионизованной плазмы можно выразить через характерные частоты так:

$$\sigma = \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} \quad (16.22),$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \quad (16.23).$$

Проанализируем полученные важные выражения для электропроводности и диэлектрической проницаемости плазмы, рассматривая различные предельные случаи соотношения частот, входящих в выражения для электропроводности и диэлектрической проницаемости плазмы. Из выражения для высокочастотной электропроводности плазмы (16.22) видно, что ее знак всегда положителен, но величина электропроводности зависит от соотношения входящих в выражение (16.22) частот ω , ν и ω_{pe} . При низких частотах СВЧ излучения, когда частота колебаний СВЧ поля существенно ниже частоты столкновений $\omega \ll \nu$, получаем следующее выражение для электропроводности сильно столкновительной слабоионизованной плазмы:

$$\sigma = \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} \approx \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi \nu^2} = \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi \nu} = \frac{n_e e^2}{m_e \nu} \quad (16.24).$$

Полученное асимптотическое выражение (16.24) для электропроводности плазмы для низких частот СВЧ поля совпадает с известным выражением для электропроводности плазмы в постоянном или медленно меняющемся электрическом поле, известное из физической электроники. Это совпадение в пределе $\omega \rightarrow 0$ указывает на более общий характер выражений (16.19) и (16.22) для электропроводности плазмы для любых частот электромагнитного поля, включая как частоты лазерного и СВЧ излучений, так и низкие частоты поля, приближающиеся к постоянному полю. Это выражение для электропроводности плазмы схоже по структуре с электропроводностью металлов, для которых проводимость возрастает

(соответственно электрическое сопротивление падает) обратно пропорционально снижению частоты столкновений.

Для диэлектрической проницаемости сильно столкновительной слабоионизованной плазмы при $\omega \ll \nu$ получаем следующее асимптотическое выражение:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\nu^2} \quad (16.25).$$

Для выражения (16.25) возможны два случая. При частотах столкновений, существенно превышающих собственную частоту электронных плазменных колебаний $\nu \gg \omega_{pe}$, диэлектрическая проницаемость столкновительной плазмы стремится к 1 ($\varepsilon \rightarrow 1$). При больших концентрациях электронов, т.е. при значениях частоты электронных плазменных колебаний, существенно превышающих частоту столкновений $\omega_{pe} \gg \nu$ (случай очень плотной столкновительной плазмы), значения диэлектрической проницаемости такой плазмы принимают большие отрицательные значения ($\varepsilon \rightarrow -\infty$). Это означает, что внутреннее электрическое поле в сильно столкновительной и плотной плазме, индуцированное внешним электрическим полем низкой частоты, направлено против внешнего электрического поля. Тем самым внешнее электрическое поле вытесняется из плазмы полем поляризации плазмы. Это связано с тем, что поляризуемость плазмы обусловлена движением электронной компоненты плазмы, которая, перемещаясь под действием внешнего поля, создает внутри плазмы такое электрическое поле, которое противоположно по знаку и практически равно по величине внешнему полю.

При соотношении частот $\omega_{pe} \gg \nu$ электропроводность плотной столкновительной слабоионизованной плазмы (16.19) и (16.22) растет пропорционально концентрации электронов, а ее величина может быть очень большой и приближаться к электропроводности металлов и превышать ее.

Рассмотрим теперь другой предельный случай, для которого характерно существенное превышение частоты СВЧ излучения над частотой столкновений $\omega \gg \nu$. Для случая низких частот столкновений выражение для электропроводности плазмы будет иметь следующий вид:

$$\sigma = \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} \approx \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi\omega^2} = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e \omega^2} \quad (16.26).$$

Видно из (16.26), что величина электропроводности плазмы пропорциональна частоте столкновений, что существенно отличается от зависимости, представленной в формуле (16.24). Однако величина этой электропроводности будет малой, так как отношение частоты столкновений к круговой частоте поля мало $\frac{\nu}{\omega} \ll 1$. Это выражение (16.26) называется высокочастотной электропроводностью слабо столкновительной или бесстолкновительной плазмы, которая равна нулю в отсутствии столкновений. Этот неожиданный для обычных представлений о проводящей среде результат противоположен свойствам проводимости металлов, для которых при снижении частоты столкновений проводимость всегда возрастает. При малых концентрациях электронов в плазме, когда частота собственных электронных колебаний плазмы существенно меньше частоты СВЧ поля $\omega_{pe} \ll \omega$, величина электропроводности (16.26) будет спадать пропорционально снижению концентрации электронов, и, в предельном случае, приблизится к нулевому значению ($\sigma \rightarrow 0$), характерному для непроводящей среды. Свойства бесстолкновительной плазмы существенно изменяются, если осуществляется переход от малых концентраций электронов к большим, т.е. когда $\omega_{pe} \gg \omega$. В этих условиях при больших концентрациях электронов электропроводность плазмы будет возрастать пропорционально концентрации электронов, и может достигнуть больших величин, несмотря на малую величину $\frac{\nu}{\omega} \ll 1$. Эта электропроводность плотной и слабо столкновительной плазмы может даже превзойти величины

электропроводности металлов, но по характеру зависимости от частоты столкновений она будет существенно отличаться от электропроводности металлов.

При условии существенного превышения частоты СВЧ поля над частотой столкновений $\omega \gg \nu$, выражение для диэлектрической проницаемости плазмы будет иметь вид:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (16.27).$$

Это выражение представляет собой известное классическое выражение для диэлектрической проницаемости бесстолкновительной плазмы. Величина и знак ε будут зависеть от соотношения собственной частоты электронных колебаний плазмы и частоты внешнего СВЧ поля. При условии, что $\omega_{pe} \ll \omega$, диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы (16.27) будет стремиться к 1 ($\varepsilon \rightarrow 1$), т.е. плазма будет прозрачной для СВЧ излучения.

Рассмотрим теперь характер изменения диэлектрической проницаемости для плотной бесстолкновительной плазмы. Из выражения (16.27) видно, что при равенстве частоты собственных электронных колебаний плазмы и частоты СВЧ поля $\omega_{pe} \approx \omega$ реализуется такое явление как плазменный резонанс. При точном равенстве $\omega = \omega_{pe}$ частота СВЧ поля называется критической $\omega = \omega_{cr} = \omega_{pe}$, а диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы приближается к нулю ($\varepsilon \rightarrow 0$). Это соответствует тому, что электрическое поле в плазме «экранируется» от внешнего поля. В реальности, подробное рассмотрение явления плазменного резонанса намного сложнее. В неоднородной плазме при распространении электромагнитной волны р-поляризации (электрическая компонента СВЧ поля коллинеарна градиенту плотности плазмы) со стороны малой плотности плазмы возможно локальное усиление продольной электрической компоненты волны. При распространении СВЧ волны в неоднородной

плазме и приближении к области плазменного резонанса электрическая индукция постоянна $\vec{D}_{pl} = \text{const} = \varepsilon \vec{E}_{pl}$. Так как при таком распространении СВЧ волны величина диэлектрической проницаемости плазмы уменьшается и приближается к очень малым значениям $\varepsilon \rightarrow 0$, то электрическое СВЧ поле в плазме может существенно возрасти $\vec{E}_{pl} = \frac{D_{pl}}{\varepsilon} \rightarrow \infty$. При этом возбуждаются сильные ленгмюровские волны, в результате опрокидывания которых происходит ускорение электронов.

В отличие от диэлектрической проницаемости, для электропроводности плазмы приближение частоты СВЧ поля к собственной частоте плазмы не является критичным, и не влияет существенно на характер ее зависимости от концентрации плазмы. В то же время для диэлектрической проницаемости переход через резонансную частоту является важным, и существенно влияет на ход зависимости диэлектрической проницаемости от концентрации заряженных частиц в плазме. Так, при частотах СВЧ излучения немного выше критической частоты $\omega \geq \omega_{cr} = \omega_{pe}$, знак диэлектрической проницаемости положительный, и она ведет себя схоже с диэлектрической проницаемостью диэлектриков, но при этом величина $\varepsilon \leq 1$. В природе такие диэлектрики (кроме плазмы) со значениями диэлектрической проницаемости меньше 1 не существуют. Реально у всех природных диэлектриков значения диэлектрической проницаемости больше 1 ($\varepsilon_d \geq 1$). Только плазма может иметь значения диэлектрической проницаемости менее 1. Более того, для плазмы диэлектрическая проницаемость может принимать отрицательные значения. Действительно, при больших частотах СВЧ излучения (по сравнению с частотой столкновений), но при большой частоте собственных плазменных колебаний (т.е. при большой концентрации плазмы) $\omega_{pe} \gg \omega > \nu$, из формулы (16.27) следует:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \approx -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} < 0 \quad (16.28).$$

Таким образом, величина диэлектрической проницаемости становится отрицательной по знаку, а ее абсолютная величина может быть большой

$\left| -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right| \gg 1$. Отрицательный знак диэлектрической проницаемости возможен

только для плазмы. Это также означает, что поляризуемость плазмы и величина электрической индукции в такой плазме противоположны по знаку в отношении к внешнему электрическому полю. Эти свойства плазмы только в некотором отношении схожи с сегнетоэлектриками, обладающими в некоторых случаях чрезвычайно большими значениями диэлектрической проницаемости $\varepsilon \approx 100-1000$. Однако отличие состоит в том, что в плотной плазме ориентация электрической индукции противоположна внешнему электрическому полю, что обусловлено движением преимущественно электронной компоненты плазмы.

В заключении результаты анализа характеристик плазмы для различных соотношений частот СВЧ поля, частоты столкновений и частоты собственных электронных колебаний плазмы представлены в таблице 16.1.

Таблица 16.1. Высокочастотные характеристики плазмы для различных соотношений частот.

Характеристика плазмы	Концентрация электронов	Соотношение частот ω, ν	Соотношение частот ω_{pe}, ω	Электропроводность плазмы σ	Диэлектрическая проницаемость ϵ	Примечание, аналоги
Сильно столкновительная плазма	Низкая концентрация электронов	$\nu \gg \omega$	$\omega_{pe} \ll \omega$	$\frac{\omega_{pe}^2}{4\pi\nu} \Rightarrow 0$	$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\nu^2} \Rightarrow 1$	Низкая σ , сходная с металлической, ϵ сходна с диэлектриками
	Высокая концентрация электронов	$\nu \gg \omega$	$\omega_{pe} \gg \omega$ $\omega_{pe} \gg \nu$	$\frac{\omega_{pe}^2}{4\pi\nu} \Rightarrow \infty$	$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\nu^2} \Rightarrow -\infty$	Высокая σ , сходная с металлической. Большая отрицательная ϵ , подобная антисегнетоэлектрикам
Слабо столкновительная плазма	Низкая концентрация электронов	$\omega \geq \nu$	$\omega_{pe} \ll \omega$	$\frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} \Rightarrow 0$	$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \Rightarrow 1$	Низкая σ не сходная с металлической, малая ϵ сходна с обычными диэлектриками
	Высокая концентрация электронов	$\omega \geq \nu$	$\omega_{pe} \gg \omega$	$\frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} \Rightarrow \infty$	$-\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \Rightarrow -\infty$	Высокая σ не сходная с металлической. Большая отрицательная ϵ , подобная антисегнетоэлектрикам
Бесстолкновительная плазма	Низкая концентрация электронов	$\omega \gg \nu$	$\omega_{pe} \ll \omega$	$\frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi\omega^2} \Rightarrow 0$	$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \Rightarrow 1$	Низкая σ , ϵ подобна диэлектрикам
	Высокая концентрация электронов	$\omega \gg \nu$	$\omega_{pe} \gg \omega$	$\frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi\omega^2} \Rightarrow \infty$	$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \Rightarrow -\infty$	Высокая σ не сходная с металлической. Большая отрицательная ϵ , подобная антисегнетоэлектрикам

Лекция 17. Комплексная диэлектрическая проницаемость и комплексная электропроводность плазмы в СВЧ поле

Цель данной лекции состоит в том, чтобы вывести формулу для комплексной электропроводности и комплексной диэлектрической проницаемости однородной плазмы в СВЧ поле. Введение комплексных величин в ряде случаев является весьма полезным, так как облегчает получение решений ряда сложных задач физики плазмы, сводя решение дифференциальных уравнений к решению алгебраических уравнений.

Рассмотрим волновое уравнение, описывающее распространение плоской электромагнитной волны в свободном пространстве:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (17.1).$$

Частными решениями этого уравнения являются выражения для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в положительном направлении оси OZ . Эти частные решения имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, z) &= \vec{E}_0 \sin(\omega t - kz) \\ \vec{E}(t, z) &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz) \end{aligned} \quad (17.2),$$

здесь волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$, λ – длина волны, c – скорость света в вакууме, ω – круговая частота. Очевидно, сумма или разность частных решений (17.2) также являются решениями волнового уравнения (17.1). Формально решениями волнового уравнения (17.1) являются и комплексные функции вида:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= i\vec{E}_0 \sin(\omega t - kz) \\ \vec{E} &= i\vec{E}_0 \cos(\omega t - kz) \end{aligned} \quad (17.3),$$

где $i^2 = -1$. Это легко показать двойным дифференцированием функций (17.3) и подстановкой их в уравнение (17.1). Тогда волновое уравнение переходит в верное тождество вида $\omega^2 = k^2 c^2$. Также можно показать, что

разности и суммы решений действительных функций из (17.2) и комплексных функций (17.3) также являются решениями волнового уравнения. Очевидно, что частным решением волнового уравнения является также комплексная функция вида:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 [\cos(\omega t - kz) + i \sin(\omega t - kz)] \quad (17.4).$$

Из теории функции комплексных переменных известно, что функцию (17.4) можно представить в виде экспоненты с мнимым показателем (формула Эйлера):

$$\vec{E}_0 [\cos(\omega t - kz) + i \sin(\omega t - kz)] = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad (17.5).$$

Покажем, что комплексная функция вида:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad (17.6)$$

также является решением волнового уравнения (17.1). Действительно, вычислим вторые производные и, далее, подставим их в волновое уравнение (17.1), тогда получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}] = (i)^2 k^2 \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} = -k^2 \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}] = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \end{aligned} \quad (17.7).$$

Из выражений (17.7) видно, что после подстановки вторых производных функции (17.6) в левую и правую части волнового уравнения (17.1) получаем

из уравнения (17.1) верное тождество, т. к. $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. Тем самым убеждаемся,

что комплексная функция вида (17.6) является решением волнового уравнения, и наряду с другими функциями представляет собой комплексное математическое выражение, описывающее плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в свободном пространстве в вакууме.

Используя комплексное представление плоской волны в виде (17.6), рассчитаем ток в плазме по формулам (16.18), подставляя в него выражение для производной электрического поля по времени в виде:

$$\frac{\partial \vec{E}(z,t)}{\partial t} = i\omega \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} = i\omega \vec{E}(z,t) \quad (17.8).$$

Из электродинамики и лекции 16 известно, что полный электрический ток в среде в переменном электрическом поле представляет собой сумму тока проводимости и тока поляризации среды, и его можно записать в виде:

$$\vec{j}_{\text{mtot}}(t) = \sigma \vec{E}(t) + \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \quad (17.9).$$

Выражение для электрического тока в плазме в СВЧ поле можно также получить, опираясь на формулу для скорости электронов в таком поле с учетом столкновений электронов:

$$\vec{V}_e(t) = -\frac{e\vec{E}_0}{m_e} \left[\frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega^2 + \nu^2} \cos(\omega t) \right] \quad (17.10),$$

и общую формулу для плотности тока, выраженную через скорость электрических зарядов в среде и их объемную плотность:

$$\vec{j}(t) = -en_e \vec{V}_e(t) \quad (17.11).$$

Имея в виду (17.10) и (17.11), а также выражения для переменного электрического поля $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t)$ и его производной

$$\frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} = \omega \vec{E}_0 \cos(\omega t),$$

перейдем от векторов к их величинам. Тогда получим

формулу для величины плотности электрического тока $j(t)$ в плазме, которая может быть выражена через величину осциллирующего электрического поля $E(t)$ и его производную по времени $\frac{\partial E(t)}{\partial t}$:

$$j(t) = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} E(t) - \frac{n_e e^2}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \frac{\partial E(t)}{\partial t} \quad (17.12).$$

Теперь обратимся к комплексному выражению для электрического поля (17.6) и его производной (17.8), и тогда выражение для тока в плазме (17.12) можно представить также в комплексном виде:

$$j(t) = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} E(t) - i \frac{n_e e^2 \omega}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} E(t) \quad (17.13),$$

или

$$j(t) = \left[\frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} - i \frac{n_e e^2 \omega}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \right] E(t) \quad (17.14).$$

Выражение (17.14) для тока в плазме с учетом столкновений по форме представляет собой общую формулу для плотности электрического тока в зависимости от электрического поля и электропроводности σ в электропроводящей среде: $j_\sigma = \sigma E$. Тогда выражение в квадратных скобках равно значению комплексной удельной электропроводности плазмы σ^* :

$$\sigma^* = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} - i \frac{n_e e^2 \omega}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \quad (17.15).$$

Комплексную электропроводность плазмы σ^* можно выразить также через характерные частоты: круговую частоту СВЧ поля ω , частоту столкновения ν электронов с атомами и электронную плазменную частоту ω_{pe}^2 :

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e} \quad (17.16).$$

Тогда из (17.15) получим следующие выражения для комплексной электропроводности (удельной электрической проводимости) плазмы:

$$\sigma^* = \sigma_r + i\sigma_i = \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} - i \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} \quad (17.17),$$

где действительная часть σ_r комплексной электропроводности плазмы σ^* выражается следующей формулой:

$$\sigma_r = \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \quad (17.18).$$

Мнимая часть σ_i комплексной электропроводности плазмы представляется формулой:

$$\sigma_i = -\frac{\omega_{pe}^2 \omega}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} = -\frac{n_e e^2 \omega}{m_e(\omega^2 + \nu^2)} \quad (17.19).$$

Отметим, что действительная часть комплексной электропроводности плазмы (17.18) является собственно электрической проводимостью плазмы. Мнимая часть комплексной электропроводности плазмы σ_i связана с действительной частью комплексной диэлектрической проницаемостью плазмы:

$$\sigma_i = -\frac{\omega_{pe}^2 \omega}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} = \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} - 1 \right] \frac{\omega}{4\pi} = (\varepsilon - 1) \frac{\omega}{4\pi} \quad (17.20).$$

Выведем теперь выражение для комплексной диэлектрической проницаемости плазмы. Поскольку диэлектрическая проницаемость плазмы напрямую связана с ее поляризуемостью во внешнем переменном электрическом поле, то, используя выражение для связи переменного электромагнитного поля и его производной по времени (17.8), величину плотности тока (17.12) выразим через величину производной электрического поля:

$$\begin{aligned} j(t) &= \frac{n_e e^2 \nu}{m_e(\omega^2 + \nu^2)} E(t) - \frac{n_e e^2}{m_e(\omega^2 + \nu^2)} \frac{\partial E(t)}{\partial t} = \\ &= \frac{n_e e^2 \nu}{m_e(\omega^2 + \nu^2)} \frac{1}{i\omega} \frac{\partial E(t)}{\partial t} - \frac{n_e e^2}{m_e(\omega^2 + \nu^2)} \frac{\partial E(t)}{\partial t} = \\ &= \left[\frac{n_e e^2 \nu}{m_e(\omega^2 + \nu^2)} \frac{1}{i\omega} - \frac{n_e e^2}{m_e(\omega^2 + \nu^2)} \right] \frac{\partial E(t)}{\partial t} = \\ &= \left[-\frac{n_e e^2}{m_e(\omega^2 + \nu^2)} - i \frac{n_e e^2 \nu}{m_e \omega(\omega^2 + \nu^2)} \right] \frac{\partial E(t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (17.21).$$

Из электродинамики сплошных сред выражение для тока поляризуемости в среде имеет общий вид:

$$j_{dcm}(t) = \frac{\varepsilon^* - 1}{4\pi} \frac{\partial E(t)}{\partial t} \quad (17.22),$$

где ε^* – комплексная диэлектрическая проницаемость среды. Сравнивая (17.22) с (17.21), можно утверждать, что выражение в квадратных скобках в (17.21) и коэффициент перед временной производной переменного электрического поля в (17.22) связаны между собой следующим образом:

$$\frac{\varepsilon^* - 1}{4\pi} = -\frac{n_e e^2}{m_e(\omega^2 + \nu^2)} - i \frac{n_e e^2 \nu}{m_e \omega(\omega^2 + \nu^2)} \quad (17.23).$$

Из (17.23) окончательно получаем следующее выражение для комплексной диэлектрической проницаемости плазмы ε^* :

$$\varepsilon^* = 1 - \frac{4\pi n_e e^2}{m_e(\omega^2 + \nu^2)} - i \frac{4\pi n_e e^2 \nu}{m_e \omega(\omega^2 + \nu^2)} \quad (17.24).$$

Эту формулу для комплексной диэлектрической проницаемости плазмы можно выразить также через характерные частоты ω , ω_{pe} , ν :

$$\varepsilon^* = \varepsilon_r - i\varepsilon_i = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} - i \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{\omega(\omega^2 + \nu^2)} \quad (17.25).$$

Из выражения (17.25) видно, что действительная часть комплексной диэлектрической проницаемости плазмы является собственно диэлектрической проницаемостью плазмы:

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \quad (17.26).$$

Мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости плазмы связана с действительной частью комплексной электропроводности плазмы σ_r так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{\omega(\omega^2 + \nu^2)} = \frac{4\pi\sigma_r}{\omega}, \\ \sigma_r &= \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e(\omega^2 + \nu^2)} \end{aligned} \quad (17.27).$$

Окончательные связи комплексной электропроводности плазмы и комплексной диэлектрической проницаемости плазмы могут быть выражены следующими формулами:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_r - i\varepsilon_i = \varepsilon_r - i \frac{4\pi\sigma_r}{\omega} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} - i \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{\omega(\omega^2 + \nu^2)} \quad (17.28),$$

$$\sigma^* = \sigma_r + i\sigma_i = \sigma_r + i \frac{(\varepsilon_r - 1)\omega}{4\pi} = \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} - i \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} \quad (17.29).$$

Как видно из выше изложенного материала, комплексные представления электропроводности и диэлектрической проницаемости плазмы возникают только в том случае, если мы представляем электромагнитную волну также в комплексном виде. На первый взгляд такие представления кажутся искусственными, и с трудом связываются с физическим смыслом входящих в них величин. Однако комплексное представление волн и физических параметров, описывающих плазму, позволяет во многих случаях существенно упростить получение конечного решения во многих сложных физических задачах путем сведения дифференциальных уравнений к алгебраическим уравнениям.

Важно отметить, что выражения для комплексной диэлектрической проницаемости плазмы и комплексной электропроводности плазмы, полученные выше, верны при представлении электромагнитной волны в виде (17.6), т.е. $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$. Однако волна может быть представлена и в другом виде, а именно:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} \quad (17.30).$$

Представление (17.30) также является решением волнового уравнения. Но в этом случае выражения для комплексных значений диэлектрической проницаемости плазмы ε^* и комплексной электропроводности σ^* изменятся. Так, производная СВЧ поля по времени по сравнению с (17.8) будет иметь уже вид:

$$\frac{\partial \vec{E}(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} = -i\omega \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} = -i\omega E(z,t) \quad (17.31).$$

В отличие от выражения производной (17.8) для представления волны в виде $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$, в производной переменного электрического поля СВЧ волны в представлении $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ в (17.31) появился знак минус. Тогда для СВЧ поля в представлении $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ изменятся знаки перед мнимыми частями в формулах $\mathcal{E}^*$ и σ^* ;

$$\mathcal{E}^* = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} + i \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{\omega(\omega^2 + \nu^2)} \quad (17.32)$$

$$\sigma^* = \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} + i \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} \quad (17.33).$$

Таким образом, в зависимости от выбранного представления электромагнитной волны, в выражениях $\mathcal{E}^*$ и σ^* для плазмы будут изменяться знаки перед их мнимыми частями. Для обоих представлений электромагнитной волны в видах $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{\pm i(\omega t - kz)}$ будут справедливы следующие выражения для $\mathcal{E}^*$ и σ^* :

$$\mathcal{E}^* = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{\omega(\omega^2 + \nu^2)} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \mp i\nu)} \quad (17.34)$$

$$\sigma^* = \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} \mp i \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} = \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi(\nu \pm i\omega)} \quad (17.35)$$

В зависимости от конкретных условий можно использовать то или иное комплексное представление электромагнитной волны, и тогда необходимо применять и соответствующие этим представлениям выражения для комплексной диэлектрической проницаемости $\mathcal{E}^*$ и комплексной электропроводности σ^* плазмы.

Лекция 18. Распространение и затухание СВЧ волн в однородной и изотропной плазме

Цель данной лекции состоит в том, чтобы вывести формулы, описывающие распространение и поглощение СВЧ волн в однородной и изотропной плазме. Введенные ранее представления о комплексной электропроводности и комплексной диэлектрической проницаемости плазмы будут весьма полезны для упрощения решения поставленных задач.

Уравнения Максвелла для среды имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi \vec{j}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \rho \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} \end{aligned} \quad (18.1),$$

здесь $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – векторы электрической и магнитной компонент электромагнитной волны, распространяющейся в среде, ρ – плотность избыточных (нескомпенсированных) объемных электрических зарядов в среде, $\vec{j}$ – плотность электрического тока в среде, σ – электропроводность среды. Далее будем решать уравнения (18.1) в комплексном представлении электропроводности плазмы, токов и СВЧ поля, и, таким образом, автоматически будет учитываться и комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы.

Применим операцию ротации к первому уравнению Максвелла (18.1), и, далее, используя второе уравнение Максвелла, получим следующее уравнение:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{4\pi \vec{j}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \quad (18.2).$$

Левая часть уравнения (18.2), представляющая собой двойное векторное произведение двух векторных операторов $\vec{\nabla}$ и вектора электрического поля $\vec{E}$ (коллинеарен оси OX), которое преобразуется по правилам векторной алгебры следующим образом:

$$\text{rotrot}\vec{E} \equiv \left[\vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \vec{E} \right] \right] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} \quad (18.3),$$

где учтено, что в плоской (поперечной) пространственно бесконечной электромагнитной волне не возникает некомпенсированных зарядов в плазме, т.к. под действием СВЧ поля электроны смещаются по оси OX и на их место приходят другие ($\rho = 0$, $\text{div}\vec{E} = 4\pi\rho = 0$), и поэтому первый член в правой части выражения (18.3) равен нулю:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div}\vec{E}) = \text{grad}(4\pi\rho) = 0$$

Правая часть уравнения (18.2) при учете соотношения $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ преобразуется к следующему выражению:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{4\pi\vec{j}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = -\frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (18.4).$$

Учитывая (18.3) и (18.4) уравнение (18.2) преобразуется к следующему виду:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (18.5).$$

Далее будем использовать представление для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в направлении оси OZ , в следующем комплексном виде:

$$\vec{E}(t, z) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad (18.6),$$

где $\vec{E}_0$ – вектор амплитды электрической компоненты электромагнитной волны, k – волновое число электромагнитной волны в вакууме, ω – круговая частота электромагнитной волны. Электрическая компонента волны осциллирует коллинеарно оси OX .

Вычислим $\vec{\nabla}^2 \vec{E}(t, z)$ путем подстановки (18.6) в (18.5):

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}(t, z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} (-ik)^2 = -k^2 \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad (18.7).$$

Производные электрического поля по времени в правой части уравнения (18.5) преобразуются так:

$$\frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} (i\omega) \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} + \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad (18.8).$$

Приравнявая (18.7) и (18.8) получаем следующее алгебраическое уравнение:

$$\begin{aligned} -k^2 \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} &= \frac{4\pi\sigma}{c^2} (i\omega) \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} + \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ k^2 &= -\frac{4\pi\sigma}{c^2} (i\omega) + \frac{1}{c^2} \omega^2 \end{aligned} \quad (18.9).$$

Последнее выражение в (18.9) называется дисперсионным соотношением, которое связывает волновое число и частоту электромагнитной волны в среде. Из (18.9) видно, что для комплексного представления электромагнитной волны волновое число в среде с комплексной электропроводностью в виде:

$$\sigma = \sigma_r + i\sigma_i = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} - i \frac{n_e e^2 \omega}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} = \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} - i \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} \quad (18.10),$$

является также комплексной величиной. Комплексного волнового числа k , представив его в виде:

$$k = \beta - i\alpha \quad (18.11),$$

где α и β действительные величины. Подставим (18.10) и (18.11) в (18.9), и получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} k^2 &= \beta^2 - 2i\alpha\beta - \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} (i\omega) = \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi}{c^2} (i\omega) \left[\frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} - i \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{4\pi(\omega^2 + \nu^2)} \right] = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \omega^2}{c^2(\omega^2 + \nu^2)} - i \frac{\omega_{pe}^2 \omega \nu}{c^2(\omega^2 + \nu^2)} \end{aligned} \quad (18.12).$$

Приравнивая действительные мнимые части правой и левой частей уравнения (18.12), получаем следующие алгебраические уравнения для нахождения величин α и β :

$$\begin{aligned}\beta^2 - \alpha^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \omega^2}{c^2(\omega^2 + \nu^2)} \\ 2\alpha\beta &= \frac{\omega_{pe}^2 \omega \nu}{c^2(\omega^2 + \nu^2)}\end{aligned}\quad (18.13).$$

Из (18.13) получаем выражения для нахождения β , α^2 и β^2 :

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\omega_{pe}^2 \omega \nu}{2\alpha \cdot c^2(\omega^2 + \nu^2)} \\ \left[\frac{\omega_{pe}^2 \omega \nu}{2\alpha \cdot c^2(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 - \alpha^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \omega^2}{c^2(\omega^2 + \nu^2)} \\ \alpha^4 + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \omega^2}{c^2(\omega^2 + \nu^2)} \right] \cdot \alpha^2 - \left[\frac{\omega_{pe}^2 \omega \nu}{2c^2(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 &= 0\end{aligned}\quad 18.14).$$

Последнее уравнение в (18.14) является биквадратным уравнением относительно α^2 , решение которого представляется в виде:

$$\alpha^2 = -\frac{1}{2} \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \omega^2}{c^2(\omega^2 + \nu^2)} \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \omega^2}{c^2(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 + \left[\frac{\omega_{pe}^2 \omega \nu}{2c^2(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2} \quad (18.15).$$

Так как α^2 величина неотрицательная, то физически правильному решению (18.15) будет отвечать знак $+$ перед квадратным корнем. Далее, делая простые преобразования выражения (18.15), получим выражение для α^2 в следующем виде:

$$\alpha^2 = -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2} \quad (18.16).$$

Используя выражение (18.16), из (18.13) получаем выражение для β^2 :

$$\beta^2 = \alpha^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \omega^2}{c^2(\omega^2 + \nu^2)} = \alpha^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]$$

$$\beta^2 = + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2}$$
(18.17)

Чтобы понять физический смысл величин α и β , подставим выражение для комплексного волнового числа $k = \beta - i\alpha$ в выражение для комплексной волны:

$$\vec{E}(t, z) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} = \vec{E}_0 e^{i\omega t} \cdot e^{-ikz} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (18.18).$$

Из (18.18) видно, что величина α входит в качестве коэффициента в действительный показатель убывающей экспоненты, которая уменьшается с увеличением пройденного волной расстояния z , и, таким образом, α определяет затухание амплитуды волны по мере ее распространения в плазме. Величина β входит в мнимый показатель экспоненты в качестве «нового» волнового числа, и, таким образом, определяет длину электромагнитной волны уже в плазме $\lambda_{pl} = \frac{2\pi}{\beta}$, которая отличается от длины волны в вакууме $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} c$. Фазовая скорость электромагнитной волны в плазме $V_{ph} = \frac{\omega}{\beta}$ также отличается от скорости света в вакууме $c = \frac{\omega}{k}$.

Далее будем анализировать различные случаи соотношений частот, входящих в выражения для α и β : частоты электромагнитного поля ω , частоты столкновений ν и частоты плазменных колебаний ω_{pe} .

Случай 1: $\omega \gg \nu$, $\omega \gg \omega_{pe}$. Этот случай соответствует условиям распространения электромагнитной волны в бесстолкновительной плазме с малой электронной плотностью. Соотношение $\omega \gg \omega_{pe}$ соответствует тому,

что электронная плотность плазмы $n_e = \frac{m\omega_{pe}^2}{4\pi e^2}$ по отношению к критической

электронной плотности $n_{cr} = \frac{m\omega_{cr}^2}{4\pi e^2} \equiv \frac{m\omega^2}{4\pi e^2}$ много меньше 1:

$$\omega \gg \omega_{pe} \Rightarrow \omega^2 \gg \omega_{pe}^2 \Rightarrow \frac{4\pi n_{cr} e^2}{m_e} \gg \frac{4\pi n_e e^2}{m_e} \Rightarrow n_{cr} \gg n_e \Rightarrow \frac{n_e}{n_{cr}} \ll 1 \quad (18.19).$$

Соотношение $\omega \gg \nu$ означает, что реальная часть электропроводности плазмы по абсолютной величине существенно меньше мнимой части комплексной величины электропроводности плазмы $\sigma_r \ll |\sigma_i|$:

$$\sigma_r = \frac{n_e e^2 \nu}{m_e (\omega^2 + \nu^2)} \ll |\sigma_i| = \frac{n_e e^2 \omega}{m_e (\omega^2 + \nu^2)}; \quad \frac{\omega_{pe}^2 \nu}{4\pi (\omega^2 + \nu^2)} \ll \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{4\pi (\omega^2 + \nu^2)}$$

Ток проводимости в плазме мал в сравнении с поляризационным током, и поглощение в такой плазме также мало. Учитывая (18.19) и (18.16) получим:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right| \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^2} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2} \approx \\ &\approx -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right| \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^2 \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^2} \right\} \approx \\ \alpha^2 &\approx \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^2 \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]} \end{aligned} \quad (18.20).$$

Прямые скобки означают модуль величины, стоящей в скобках. Затухание СВЧ поля будет определяться показателем α :

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \frac{\nu}{\omega} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^{1/2}} \approx \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \frac{\nu}{\omega} \cdot \frac{n_e}{n_{cr}} \cdot \left[1 - \frac{n_e}{n_{cr}} \right]^{-1/2}; \quad \zeta = \alpha^{-1} = 2 \frac{c}{\omega} \frac{\omega}{\nu} \cdot \frac{n_{cr}}{n_e} \left[1 - \frac{n_e}{n_{cr}} \right]^{1/2} \quad (18.21),$$

где $\zeta = \alpha^{-1}$, имеет размерность длины и называется скин слоем и характеризует глубину проникновения поля в плазму. Из (18.21) видно, что для случая 1 показатель затухания поля α в плазме мал и пропорционален волновому числу в вакууме $\frac{\omega}{c} = k_{vac}$, умноженному на малые параметры $\frac{\nu}{\omega}$ и $\frac{n_e}{n_{cr}}$. Затухание волны будет возрастать при увеличении плотности плазмы.

Параметр β^2 для случая 1 рассчитаем из формулы (18.17) так:

$$\begin{aligned} \beta^2 &= + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2} = \\ &= + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right| \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2} \frac{1}{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2} \approx \\ &\approx + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right| \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^2 \frac{1}{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^2} \right\} \approx \\ &\approx \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] + \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^2 \frac{1}{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]} \approx \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] \end{aligned}$$

(18.22).

Из (18.22) получаем значение волнового числа для распространяющейся в плазме электромагнитной волны для случая 1:

$$\beta \approx \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^{1/2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{n_e}{n_{cr}}} \quad (18.23).$$

Из (18.23) видно, что волновое число для распространяющейся в плазме электромагнитной волны меньше, чем волновое число волны в вакууме, а длина электромагнитной волны в плазме оказывается больше вакуумной:

$$\lambda_{pl} = \frac{2\pi}{\beta} \approx 2\pi \frac{c}{\omega} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^{-1/2} = \lambda_{vac} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n_e}{n_{cr}}}} \geq \lambda_{vac} \quad (18.24).$$

Фазовая скорость электромагнитной волны в такой плазме несколько превышает фазовую скорость света в вакууме c :

$$V_{ph} \approx \frac{\omega}{\beta} \approx c \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^{-1/2} = c \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n_e}{n_{cr}}}} \geq c \quad (18.25),$$

а групповая скорость волны немного ниже скорости света в вакууме:

$$V_g = \frac{d\omega}{d\beta} \approx c \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^{1/2} = c \sqrt{1 - \frac{n_e}{n_{cr}}} \quad (18.26).$$

Формальное выражение для групповой скорости $V_g = \frac{d\omega}{d\beta}$ имеет физический смысл для пакета волн, и соответствует скорости перемещения максимума энергии в среде группы волн с близкими частотами. Отметим также, что из (18.24) и (18.26) следует, что при приближении плотности плазмы к критическому значению $n_e \Rightarrow n_{cr}$ длина волны в плазме увеличивается, а групповая скорость уменьшается. Представляет интерес сравнить полученное значение затухания интенсивности электромагнитного излучения, которое можно рассчитать из формулы (18.21), с формулами

(15.35) и (15.36), полученные из уравнения Бугера-Ламберта. Затухание амплитуды электрического поля $E_0 e^{-\alpha z}$ определяется параметром α и формулой (18.21), тогда затухание интенсивности электромагнитной волны будет определяться уже экспонентой с показателем 2α :

$$E(z) \propto E_0 \exp(-\alpha z) \Rightarrow I \propto E^2(z) \propto E_0^2 \exp(-2\alpha z) \quad (18.27).$$

Из закона Бугера-Ламберта имеем следующее соотношение для затухания электромагнитной волны в плазме:

$$I_{tr}(x) = I_0 \exp(-\mu x), \quad (15.35),$$

$$\mu = \frac{4\pi n_e e^2 \nu}{m_e c(\omega^2 + \nu^2)} \quad (15.36).$$

Необходимо сравнить величину 2α и μ при одинаковом приближении $\omega \gg \nu$:

$$2\alpha \approx \frac{\omega}{c} \frac{\nu}{\omega} \cdot \frac{n_e}{n_{cr}} \cdot \left[1 - \frac{n_e}{n_{cr}}\right]^{-\frac{1}{2}} \quad (18.28),$$

$$\mu = \frac{4\pi n_e e^2 \nu}{m_e c(\omega^2 + \nu^2)} \approx \frac{4\pi n_e e^2 \nu}{m_e c \omega^2} \approx \frac{\omega}{c} \frac{\nu}{\omega} \frac{n_e}{n_{cr}} \quad (18.29).$$

Видно, что отличие формул (18.28) и (18.29) заключается в множителе

$\left[1 - \frac{n_e}{n_{cr}}\right]^{-\frac{1}{2}}$. Если плотность плазмы мала по сравнению с критической

плотностью $\frac{n_e}{n_{cr}} \ll 1$, формулы (18.28) и (18.29) дают практически

одинаковые значения. Поскольку формула (18.28) была получена из волнового уравнения, то она более точная, так как учитывает изменение длины волны электромагнитного излучения в плазме. В то время как формулы (15.36) и (18.29) не учитывают этого изменения, и эти формулы можно считать менее точными по сравнению с формулой (18.28), что особенно важно при приближении плотности плазмы к критическому значению.

Случай 2: $\omega \gg \nu$, $\omega_{pe} > \omega \Rightarrow \omega_{pe}^2 \gg \omega^2 \Rightarrow n_e \gg n_{cr}$. Этот случай соответствует распространению электромагнитной волны в плотной, но практически бесстолкновительной плазме. Определим параметры α и β для такого случая. Для этого используем выражение для α^2 (18.16) и упростим его, используя условия случая 2:

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2} \approx \\
&\approx -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^2 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^2} = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right| \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^2 \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^{-2}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - 1 \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - 1 \right] \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^2 \frac{1}{\left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - 1 \right]^2}} \approx \\
&\approx \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - 1 \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - 1 \right] \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^2 \frac{1}{\left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - 1 \right]^2} \right\} \quad (18.30).
\end{aligned}$$

Последний член в фигурных скобках (18.30) пропорционален квадрату малого параметра $\frac{\nu}{\omega}$, и поэтому им можно пренебречь по сравнению с 1.

Таким образом, приближенные выражения для параметров α^2 и α для случая 2 могут быть представлены формулами:

$$\alpha^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - 1 \right]; \quad \alpha \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - 1 \right]} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{n_e}{n_{cr}} - 1} \quad (18.31).$$

Отметим, что в упрощенное выражение для параметра α не входит частота столкновений ν , т.е. затухание волны в плазме имеет место, но оно не связано с частотой столкновений и реальной частью электропроводности плазмы. Таким образом, для случая 2 мы имеем затухание электромагнитной волны в плазме без существенного поглощения волны. Имеется аналогия этого явления в оптике, и она связана с полным внутренним отражением электромагнитной волны в среде с сильным преломлением. В нашем случае такой средой является плазма, которая при большой концентрации заряженных частиц (больше критического значения) также является средой с сильным преломлением СВЧ волны. Величина скин слоя $\zeta = \alpha^{-1}$ для этого случая может быть рассчитана по формуле:

$$\zeta = \alpha^{-1} \approx \frac{c}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - 1 \right]}} = \frac{c}{\omega} (n_{cr}^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \quad (18.32).$$

Для плотной плазмы, когда $\frac{n_e}{n_{cr}} \gg 1$, получаем формулу для скин-слоя ζ :

$$\zeta = \frac{c}{\omega} (n_{cr}^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{c}{\omega} \left(\frac{n_e}{n_{cr}} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{c}{\omega} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{c}{\omega} \cdot \frac{\omega}{\omega_{pe}} = \frac{c}{\omega_{pe}} \quad (18.33).$$

Величина параметра β^2 для случая 2 может быть вычислена из (18.17) путем следующего упрощения:

$$\begin{aligned} \beta^2 &= +\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2} \approx \\ &\approx -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^2 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right]^2} \approx \\ &\approx -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\omega^2} \right] \\ \beta^2 &\approx \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\nu^2}{\omega^2} \end{aligned} \quad (18.34).$$

Окончательно получаем выражения для волнового числа β и длины электромагнитной волны в плотной плазме λ_{pl} :

$$\beta \approx \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \frac{\omega_{pe}}{\omega} \frac{v}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \frac{v}{\omega} \left(\frac{n_e}{n_{cr}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} K_{vac} \frac{v}{\omega} \left(\frac{n_e}{n_{cr}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (18.35).$$

$$\lambda_{pl} = \frac{2\pi}{\beta} \approx 4\pi \frac{c}{\omega} \frac{\omega}{\omega_{pe}} \frac{\omega}{v} = 2\lambda_{vac} \frac{\omega}{v} \left(\frac{\omega}{\omega_{pe}} \right) = 2\lambda_{vac} \frac{\omega}{v} \left(\frac{n_{cr}}{n_e} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Фазовая скорость электромагнитной волны в плотной закритической плазме формально по редуцированной формуле определяются так:

$$V_{ph} = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{\omega}{\frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \frac{\omega_{pe}}{\omega} \frac{v}{\omega}} = c \frac{2\omega^2}{\omega_{pe} v} \quad (18.36).$$

Из (18.35) видно, что длина волны в плазме больше длины волны в вакууме, но волна проникает только на скинговую глубину (18.33), которая меньше длины волны в плазме. Таким образом, в плазме случая 2 отсутствует распространение волны и расчет фазовой скорости (18.36) не справедлив.

Случай 3: $v > \omega > \omega_{pe}$, $\omega^2 \square \omega_{pe}^2 \Rightarrow n_{cr} \square n_e$. В этом случае мы имеем дело со столкновительной плазмой, но с низкой плотностью заряженных частиц, менее критического значения. Дспользуя общую формулу (18.16) для α^2 , преобразуем ее к выражению, отвечающему случаю 3:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + v^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + v^2)} \right]^2 + \frac{v^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + v^2)} \right]^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + v^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + v^2)} \right| \sqrt{1 + \frac{v^2}{\omega^2} \frac{\omega_{pe}^4}{(\omega^2 + v^2)^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + v^2)} \right]^{-2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + v^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + v^2)} \right] \sqrt{1 + \frac{v^2}{\omega^2} \frac{\omega_{pe}^4}{(\omega^2 + v^2)^2} \left[\frac{\omega^2 + v^2}{\omega^2 + v^2 - \omega_{pe}^2} \right]^2} \approx \\ &\approx \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\omega^2 + v^2 - \omega_{pe}^2}{(\omega^2 + v^2)} \right] \frac{v^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + v^2} \right]^2 \left[\frac{\omega^2 + v^2}{\omega^2 + v^2 - \omega_{pe}^2} \right]^2 = \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{v^2}{\omega^2} \frac{\omega_{pe}^4}{(\omega^2 + v^2 - \omega_{pe}^2)(\omega^2 + v^2)} \end{aligned} \quad (18.37).$$

Для упрощения (18.37) учли, что второй член выражения под квадратным корнем в третьей строке (18.37), существенно меньше единицы:

$$\frac{\nu^2}{\omega^2} \frac{\omega_{pe}^4}{(\omega^2 + \nu^2)^2} \left[\frac{\omega^2 + \nu^2}{\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2} \right]^2 = \frac{\nu^2}{\omega^2} \frac{\omega_{pe}^4}{(\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2)^2} < \frac{\nu^2}{\omega^2} \frac{\omega_{pe}^4}{\nu^4} < \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^2 \nu^2} \ll 1 \quad (18.38),$$

$$\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2 \approx \omega^2 + \nu^2 \approx \nu^2 \quad (18.39).$$

Окончательно получаем редуцированное выражение для α^2 и α :

$$\alpha^2 \approx \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\nu^2}{\omega^2} \frac{\omega_{pe}^4}{(\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2)(\omega^2 + \nu^2)} \quad (18.40)$$

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \cdot \frac{\nu}{\omega} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2)^{\frac{1}{2}} (\omega^2 + \nu^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (18.41).$$

Для случая $\omega \gg \omega_{pe}$ выражения для α и $\zeta = \alpha^{-1}$ еще упрощаются:

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \cdot \frac{\nu}{\omega} \cdot \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \quad (18.42).$$

$$\zeta = \alpha^{-1} \approx 2 \frac{c(\omega^2 + \nu^2)}{\nu \omega_{pe}^2} \quad (18.43).$$

Для случая 3 из общей формулы (18.17) получаем следующее выражение β^2 :

$$\begin{aligned} \beta^2 &= + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 \left[\frac{\omega^2 + \nu^2}{(\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2)} \right]^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 \left[\frac{\omega^2 + \nu^2}{(\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2)} \right]^2 \right\} \approx \quad (18.44). \\ &\approx \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] - \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2)} \right]^2 \approx \\ &\approx \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] - \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\nu^2}{\omega^2} \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2)} \end{aligned}$$

Учитывая, что для случая 3 справедливы оценки, приведенные в (18.38) и (18.39), и считая, что третий член в последней строке выражения (18.44) много меньше 1, выражение для β^2 преобразуется к виду:

$$\beta^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] \quad (18.45).$$

Далее выражение (18.45) при $\nu \gg \omega$ может быть еще более упрощено:

$$\beta^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\nu^2} \right] \quad (18.46).$$

Волновое число β приближенно определяется из (18.45) так:

$$\beta \approx \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (18.47).$$

Из (18.47) определяется длина волны в плазме:

$$\lambda_{pl} = \frac{2\pi}{\beta} \approx \frac{2\pi c}{\omega} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (18.48).$$

Соответственно, фазовая скорость волны в плазме для случая 3 определяется формулой:

$$V_{ph} = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{c}{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (18.49).$$

Случай 4: $\nu \square \omega$, $n_e \gg n_{cr} \Rightarrow \omega_{pe}^2 \gg \omega^2$, $\nu > \omega_{pe}$, что соответствует условиям сильно столкновительной и плотной плазмы. Из общего выражения (18.16), учитывая условия случая 4, получаем формулу для α^2 :

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2} = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\nu^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu^2} \right| \sqrt{\left[1 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^{-2}} = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\nu^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu^2} \right| \sqrt{\left[1 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 \left[\frac{\omega^2 + \nu^2}{(\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2)} \right]^2} = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\nu^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu^2} \right| \sqrt{\left[1 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2)} \right]^2} \approx \\
&\approx -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\nu^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu^2} \right| \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2)} \right]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{18.50}$$

При $\omega^2 + \nu^2 > \omega_{pe}^2$ и $\nu^2 \ll \omega^2$ выражение для α^2 и α имеют вид:

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &\approx \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\nu^2}{\omega^2} \frac{\omega_{pe}^4}{(\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2)} \frac{1}{(\omega^2 + \nu^2)} \approx \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\nu^2}{\omega^2} \frac{\omega_{pe}^4}{\nu^4} \approx \frac{1}{4} \frac{\omega_{pe}^4}{c^2 \nu^2} \\
\alpha &\approx \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{c \nu}
\end{aligned} \tag{18.51}$$

Для случая 4 получаем формулу для β^2 из выражения (18.17):

$$\begin{aligned}
\beta^2 &= +\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2} \approx \\
&\approx +\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\nu^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\nu^2} \right]^2 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\nu^2} \right]^2} \approx \\
&\approx +\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\nu^2} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\nu^2} + \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^4}{\nu^4} + \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^2 \nu^2} \right] \approx \\
&\approx \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\nu^2} + \frac{1}{4} \frac{\omega_{pe}^4}{\nu^4} + \frac{1}{4} \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^2 \nu^2} \right] \approx \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\nu^2} + \frac{1}{4} \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^2 \nu^2} \right]
\end{aligned} \tag{18.52}$$

Из (18.52) получаем выражение для β и λ_{pl} в следующем виде:

$$\beta \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{v^2} + \frac{1}{4} \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^2 v^2}}$$

$$\lambda_{pl} = \frac{2\pi}{\beta} \approx \frac{c}{\omega \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{v^2} + \frac{1}{4} \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^2 v^2}}} \quad (8.53).$$

Скин-слой ζ будет определяться упрощенным выражением, которое практически не зависит от частоты электромагнитного поля:

$$\zeta = \alpha^{-1} \approx 2 \frac{cV}{\omega_{pe}^2} \quad (18.54).$$

Формально фазовая скорость волны в такой плотной и сильно столкновительной плазме определяется выражением:

$$V_{ph} = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{v^2} + \frac{1}{4} \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^2 v^2}}} \quad (18.55).$$

Однако, в сильно столкновительной и плотной плазме поле волны практически полностью затухает в скин-слое, не совершив даже одного полного колебания в среде, и, стало быть, расчеты фазовой скорости для данного случая теряют физический смысл.

Таким образом, с использованием формализма комплексной электропроводности плазмы удалось вывести дифференциальное уравнение, описывающее распространение электромагнитных волн в плазме с различными соотношениями частоты собственных колебаний, частоты СВЧ поля и частоты столкновений, и свести его к алгебраическим уравнениям с комплексными значениями. Решения уже алгебраических уравнений позволили достаточно просто получить важные формулы для расчета распространения и затухания электромагнитной волны как в разреженной, так и в плотной бесстолкновительной плазме, а также вывести формулы для описания поглощения волн как в сильно столкновительной, так и в слабо столкновительной плазме различной плотности.

Задача 18.1.

Рассчитать затухание электрического поля СВЧ излучения длиной волны 30 см в плазме с концентрацией $n_e = 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении 0.5 Тор.

Решение.

Рассчитаем характерную частоту СВЧ поля ω , частоту электронных столкновений ν и электронную частоту плазмы ω_{pe} , а также квадраты этих частот:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \approx \frac{6.28 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{30} \approx 6.28 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$$

$$\omega^2 \approx 39.44 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-2}$$

$$\nu \approx 5 \cdot 10^9 \text{ п} \approx 5 \cdot 10^9 \cdot 0.5 \approx 2.5 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$$

$$\nu^2 \approx 6.25 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-2}$$

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e} \approx \frac{4 \cdot 3.14 \cdot 5 \cdot 10^{10} \cdot 23 \cdot 10^{-20}}{9.1 \cdot 10^{-28}} \approx 158.72 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-2}$$

Сравнение квадратов частот дает следующие соотношения:

$$\omega_{pe}^2 > \omega^2 \geq \nu^2. \text{ Эти соотношения соответствуют случаю 2, характерному}$$

для распространения СВЧ волны в плотной слабостокновительной плазме.

Однако близость значений квадратов частоты СВЧ поля и частоты электронных столкновений $\omega^2 \geq \nu^2$, а также соотношение частот $\omega_{pe}^2 > \omega^2 + \nu^2$ не дает возможности применить редуцированные формулы, поэтому воспользуемся точной нередуцированной формулой (18.16):

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right| \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^2 \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right]^{-2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \right| \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2)} \right]^2} \end{aligned}$$

Так как соотношение частот таково, что $\omega_{pe}^2 > \omega^2 + \nu^2$, то раскрытие модуля

выражения дает следующее $\left|1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)}\right| = \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} - 1$, тогда получаем следующее выражение для α^2 :

$$\alpha^2 = -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)}\right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} - 1\right] \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2)}\right]^2}$$

Теперь рассчитаем величину подкоренного выражения:

$$1 + \frac{\nu^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2 - \omega_{pe}^2)}\right]^2 \approx 1 + \frac{6.25 \cdot 10^{18}}{39.44 \cdot 10^{18}} \left[\frac{158.72 \cdot 10^{18}}{39.44 \cdot 10^{18} + 6.25 \cdot 10^{18} - 158.72 \cdot 10^{18}}\right]^2 \approx 1.309$$

Далее вычислим значения для α^2 , α и α^{-1} :

$$\begin{aligned} \alpha^2 &\approx -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)}\right] + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} - 1\right] \cdot 1.144 \approx \\ &\approx -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} \cdot 1.144 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \cdot 1.144 \approx \\ &\approx 1.07 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} - 1.07 \frac{\omega^2}{c^2} \approx 1.07 \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega^2 + \nu^2)} - 1\right] \approx \\ &\approx 1.07 \cdot \frac{39.44 \cdot 10^{18}}{9 \cdot 10^{20}} \left[\frac{158.72 \cdot 10^{18}}{39.44 \cdot 10^{18} + 6.25 \cdot 10^{18}} - 1\right] \approx 0.116 \text{ см}^{-2} \\ \alpha &\approx 0.34 \text{ см}^{-1}; \quad \alpha^{-1} = \zeta \approx 2.93 \text{ см} \end{aligned}$$

Сравним рассчитанное значение скин-слоя по нередуцированной формуле со значением, полученным по редуцированной формуле (18.33):

$$\zeta \approx \frac{c}{\omega_{pe}} \approx \frac{3 \cdot 10^{10}}{\sqrt{158.72 \cdot 10^{18}}} \approx \frac{30}{12.59} \approx 2.38 \text{ см}$$

Результаты отличаются не сильно, что позволяет в ряде случаев быстро рассчитывать скин-слой по редуцированной формуле для проникновения СВЧ поля в плазму с отличием от точного значения в пределах погрешности до 20%.

Литература

1. A.A. Rukhadze, A.F. Alexandrov, L.S. Bogdankevich Principales of Plasma Electrodynamics // Moscow, Publisher "KRASAND", 2013. 488 pp. (ISBN 978-5-396-00482-5).
2. В.Л. Гинзбург, А.А. Рухадзе Волны в магнитоактивной плазме // М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. – 262с. (ISBN 978-5-397-04607-7)
3. В.П. Силин, А.А. Рухадзе Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред // М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 248с. (ISBN 978-5-397-03015-1)
4. В.Л. Гинзбург «Распространение электромагнитных волн в плазме». ФИЗМАТГИЗ. Москва.1960.
5. Ю.П. Райзер «Физика газового разряда». Издание второе. Москва, «НАУКА», 1992.
6. В.Е. Голант «Сверхвысокочастотные методы исследования плазмы». Изд-во НАУКА. Москва, 1968.
7. М. Хилд, С. Уортон. Микроволновая диагностика плазмы. М.: Атомиздат. 1968г. 392С.
8. Мак-Дональд А. «Сверхвысокочастотный пробой в газах». Изд-во «МИР». Москва. 1969.
9. Ю.П. Райзер «Лазерная искра и распространение разрядов» Москва: издательство «Наука».1974г. 308С.
10. A.S. Sakharov, V.A. Ivanov, Yu.A. Tarbeeva, M.E. Konyzhev. Theoretical and experimental study of microwave power absorption by a single-sided multipactor discharge on a dielectric // Plasma Physics Reports, 2012, Vol. 38, No. 13, Pp. 1098-1108.
11. Vyacheslav A. Ivanov, Alexander S. Sakharov, and Mikhail E. Konyzhev Strong Local Interaction of Microwave Discharges With Solid Dielectrics in Vacuum (TPS8172) // IEEE Transactions on Plasma Science. 2015.Volume 43. Issue 6. P. 1871 – 1878.

12. V. A. Ivanov, A. S. Sakharov, and M. E. Konyzhev Microwave Power Absorption by a Multipactor Discharge on a Dielectric Surface: Theory and Experiment // In Book "Microwave discharges: fundamentals and applications". Proceedings of the VIII International Workshop on Microwave discharges: fundamentals and applications (MD-8). Zvenigorod, September 10-14, 2012. Moscow: Yanus-K, 2012. C. 75-80. (ISBN 978-5-8037-0570-3)
13. V. A. Ivanov, A. S. Sakharov, M. E. Konyzhev Two-Dimensional PIC Simulations of a Multipactor Discharge on a Dielectric in a Parallel-Plate Waveguide // In Book "Microwave discharges: fundamentals and applications". Proceedings of the VIII International Workshop on Microwave discharges: fundamentals and applications (MD-8). Zvenigorod, September 10-14, 2012. Moscow: Yanus-K, 2012. C. 69-74. (ISBN 978-5-8037-0570-3)
14. A. S. Sakharov, V. A. Ivanov, and M. E. Konyzhev Multipactor Discharge on a Dielectric at Different Inclination Angles of the Microwave Electric Field Relative to the Dielectric Surface // Plasma Physics Reports, 2013, Vol. 39, No. 13, pp. 1104–1111.
15. А.М. Анпилов, Э.М. Бархударов, А.М. Давыдов, А.В. Двоенко, В.А. Иванов, И.А. Косый, Г.С. Лукьянчиков, И.В. Моряков «О решении проблемы предотвращения вторично-эмиссионного разряда, разрушающего элементы бортовой радиоэлектронной аппаратуры на спутниках связи» // Всероссийская (с международным участием) конференция «Физика низкотемпературной плазмы» ФНТП-2014. Сборник материалов, том 1. СС.91-92
16. А. С. Сахаров, В. А. Иванов, М. Е. Коныжев Численное моделирование методом частиц в ячейке мультипакторного разряда на диэлектрике в плоскопараллельном волноводе // Успехи прикладной физики. 2014. Том 2. В. 5. С. 476-485.
17. К. В. Артемьев, А. М. Давыдов, В. А. Иванов, И. А. Косый, Г. С. Лукьянчиков, И. В. Моряков Микроволновый капиллярный факел как

средство воздействия на электрофизические характеристики металлической поверхности // Успехи прикладной физики. 2014г. Том 2. В. 5. С. 486-497.

18. К. Ф. Сергейчев, В. В. Душик, В. А. Иванов, В. Г. Лаптева, Ю. В. Лахоткин, Н. А. Лукина, М. А. Борисенко, Л. В. Поддубная Газофазный плазмохимический синтез поликристаллического алмазного покрытия рабочей поверхности твердосплавных режущих инструментов в плазме факельного СВЧ-разряда (обзор) // Успехи прикладной физики. 2014г. Том 2. №5. С.453-475.

19. С.Браун. Элементарные процессы в плазме газового разряда. М.:Госатомиздат, 1961. 20. В.П.Сазонов. Выходные устройства мощных СВЧ электровакуумных приборов (обзор). Электронная техника, сер. Электроника СВЧ, 1967. В. 11. С. 47–72.

20. Strong Microwaves in Plasmas. Vol. I, II. /Edited by A.G.Litvak. –Nizhny Novgorod: Institute of Applied Physics, 1997.

21. Г.М.Приезжев, В.П.Сазонов. Исследование вторично–электронного разряда на СВЧ между керамическими поверхностями. Электронная техника, сер. Электроника СВЧ, 1966. В. 11. С. 119–134.

22. Л.В.Гришин, А.А.Дорофеев, И.А.Косый, Г.С.Луюнчиков, М.М.Савченко. Исследование вторично–эмиссионного СВЧ разряда при больших углах пролета электронов. Труды ФИАН, 1977. Т. 92. С. 82–131.

23. А.Б.Мокров. Исследование вторично–эмиссионного разряда и эмиссии горячих электронов в СВЧ электрических полях. Дисс. на соискание уч. степени к.ф.–м.н. Ленинград: ЛПИ, 1981. 166 с.

24. В.А.Волков. Исследование вторично–эмиссионного размножения электронов в высокочастотном электрическом поле. Дисс. на соискание уч. степени к.ф.–м.н. Ленинград: ЛПИ, 1985. 198 с.

25. Г.М.Батанов, В.А.Иванов, М.Е.Коньжев. Микроволновый пробой ионных кристаллов, инициированный вторично–эмиссионным разрядом. Письма в ЖЭТФ, 1994. Т. 59. В. 10. С. 655–658.

26. Г.М.Батанов, В.А.Иванов, М.Е.Коньжев, А.А.Летунов. Люминесценция короткоживущих центров окраски, наведенных в кристаллах LiF импульсным СВЧ разрядом. Письма в ЖЭТФ, 1997. Т. 66. № 3. С. 163–167.
27. А.Ф.Александров, Л.С. Богданкевич, А.А.Рухадзе «Основы электродинамики плазмы». М.: Высшая школа. 1978.
28. И.Р. Геккер «Взаимодействие сильных электромагнитных полей с плазмой». Атомиздат. Москва. 1978.
29. Дж. Альтман «Устройства СВЧ». Изд-во «МИР», Москва, 1968.
30. И.В. Лебедев «Техника и приборы сверхвысоких частот» Т.1 и 2. Госэнергоиздат. Ленинград, 1961.
31. Генерация нелинейных волн и квазистационарных токов в плазме. М.: Наука, 1988. (Труды ИОФАН, Т. 16).
32. Диссипация электромагнитных волн в плазме. М.,Наука,1977. С.35-69.(Труды ФИАН; Т.92).
33. Microwave Discharges: Fundamentals and Applications. Ed. Yu.A. Lebedev. Yanus-K. Moscow 2001. ISBN 5-8037-0066-5.
34. Microwave Discharges: Fundamentals and Applications. Ed. Andreas Ohl. INP. Greifswald 2003. ISBN 3-00-011612-5.
35. Strong Microwaves in plasmas. Ed. A.G. Litvak. V. 1, 2. Nizhny Novgorod-2003. ISBN 5-8048-0039-X.
36. А.Н. Диденко. СВЧ - энергетика. Теория и практика. М.: НАУКА. 2003. – 446с.
37. Proceedings of the 5th International Workshop on Multipactor, Corona and Passive Intermodulation in Space RF Hardware (MULCOPIM-2005 Workshop). 12-14 September 2005. European Space Agency (ESA/ESTEC), Noordwijk, Netherlands. P. 169-175.
38. Батанов Г.М., Иванов В.А., Коньжев М.Е., Летунов А.А. Люминесценция короткоживущих центров окраски, наведенных в кристаллах

LiF импульсным СВЧ разрядом // Журнал Письма ЖЭТФ. 1997. Т.66. Вып.3. С.163-167.

39. Батанов Г.М., Бархударов Э.М., Грицинин С.И., Иванов В.А., Косый И.А., Коньжев М.Е., Мисакян М.А., Тарасова Н.М. Исследование микроволновых разрядов для очистки газов от экологически опасных примесей и в интересах высоких технологий // В кн. Физика микроволн. Сборник отчетов по научным проектам МНТП России «Физика микроволн» за 1997 год. г. Н.Новгород: Институт прикладной физики РАН, 1998 г. С.205-211.

40. Батанов Г.М., Грицинин С.И., Иванов В.А., Коньжев М.Е., Косый И.А., Мисакян М.А., Сапожников А.В., Тарасова Н.М. Исследование микроволновых разрядов для очистки газов от экологически опасных примесей и в интересах высоких технологий // В кн. Физика микроволн. Сборник отчетов по научным проектам МНТП России «Физика микроволн» за 1998 год. Н.Новгород: Институт прикладной физики РАН, 1999 г. Том 2. С.381-38

41. Иванов В.А., Коньжев М.Е., Гавриленко В.П., Окс Е.А., Летунов А.А. Образование сверхплотной плазмы при СВЧ пробое диэлектриков // Прикладная физика. 2005. №6. С.40-51.

42. Иванов В.А., Коньжев М.Е. Образование локальных разрушений в диэлектриках, взаимодействующих с безэлектродными СВЧ разрядами. // Прикладная физика. №6. 2004. С.42-52.

43. V.A. Ivanov, M.E. Konyzhev, V.P. Gavrilenko, E.A. Oks and A.A. Letunov Microwave discharges on the surfaces of dielectrics // In book: Microwave Discharges: fundamentals and applications. Ed. Yu.A. Lebedev. Published by "Yanus-K". Moscow, 2006. Pp.233-238.

44. Batanov G.M., Ivanov V.A., Khomenko A.I., Konyzhev M.E., Ravaev A.A., Seleznev V.D. Generation of High Potentials in the Plasma by the Interaction with Intense Microwave Radiation // Strong Microwave in Plasmas. Vol.2. P.553-558.

Proceedings of the International Workshop, Suzdal. 18-23. Sept. 1990. (Ed. by Litvak A.G.) Institute of Appl. Phys., Nizhny Novgorod.1991.

45. G.M.Batanov and V.A.Ivanov. Plasma-Flare Conversion of the Energy of Microwaves in the Decimeter Band into the Energy of Qusi-Stationary Electric Current // in book: Generation of Nonlinear Waves and Quasi-stationary Currents in Plasma. Edited by L.M.Kovrizhnykh. Nova Science Publishers, Inc. New York, 1992. .Pp.55-99. (ISBN 1-56072-069-7, ISBN 0895-8823)

46. Батанов Г.М., Иванов В.А., Коныжев М.Е., Конюшкин В.А., Мирон С.Б. Создание оптически плотного слоя на поверхности LiF кристаллов при окрашивании в микроволновом разряде // Письма в ЖТФ. 1993. Т.19.В.20. С.42-45.

47. Батанов Г.М., Иванов В.А., Коныжев М.Е. Микроволновый пробой ионных кристаллов, инициированный вторично-эмиссионным разрядом // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 59. В. 10. С. 655-658.

48. Batanov G.M., Ivanov V.A., Konyzhev M.E. Microwave Breakdown on the Surface of Ionic Crystals in Vacuum // XXII Conference on Phenomena in Ionized Gases. Vol. IV. Ed. K.H. Becker, W.E. Carr, E.E. Kunhardt. Stevens Institute of Technology Published, Hoboken, New Jersey, USA, 1995. P.143-144.

49. Батанов Г.М., Иванов В.А., Коныжев М.Е., Летунов А.А. Люминесценция короткоживущих центров окраски, наведенных в кристаллах LiF импульсным СВЧ разрядом // Журнал Письма ЖЭТФ. 1997. Т.66. Вып.3. С.163-167.

50. V.A. Ivanov, M.E. Konyzhev. Interaction of microwave discharges with dielectric LiF crystals // In book: Microwave Discharges: fundamentals and applications (Proceedings of IV International Workshop). Ed. Yu.A. Lebedev. Moscow, Yanus-K published, 2001. P. 219-228.

51. V.A. Ivanov, M.E. Konyzhev. Strong Interaction of electrodeless microwave discharges with dielectric LiF crystals. // In Book: Proceedings of the XX-th International Symposium on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum.

Tours (France) – July1-5, 2002. Ed. SFV 2002. Pp. 499-502. IEEE Catalogu Number 02CH37331. ISBN 0-7803-7394-4. ISSN 1093-2941.

52. V.A. Ivanov and M.E. Konyzhev Breakdowns and destructions of dielectrics in strong microwave fields. In book: Strong Microwaves in plasmas. Ed. A.G. Litvak. V. 2. P.684-692. Nizhny Novgorod-2003. ISBN 5-8048-0039-X.

53. V.A. Ivanov and M.E. Konyzhev. Destructions produced in dielectrics by pulsed microwave discharges // In book: Microwave Discharges: Fundamentals and Applications (Proceedings of V International Workshop). Editor: Andreas Ohl. INP, Greisfwald, 2003. Printed by Keibu-Druck GmbH. ISBN 3-00-011612-5. Pp.247-254.

54. Иванов В.А., Коныжев М.Е. Образование локальных разрушений в диэлектриках, взаимодействующих с безэлектродными СВЧ разрядами // Прикладная физика. №6. 2004. С.42-52.

55. V.A. Ivanov, M.E. Konyzhev, V.P. Gavrilenko, E. Oks. Super Dense Plasma Created in Contracted Microwave Discharge on Surface of Dielectrics. Proceedings of the 5th International Workshop on Multipactor, Corona and Passive Intermodulation in Space RF Hardware (MULCOPIM-2005 Workshop). 12-14 September 2005. European Space Agency (ESA/ESTEC), Noordwijk, Netherlands. P. 169-175.

56. Иванов В.А., Коныжев М.Е. В.П. Гавриленко, Е.А. Окс, А.А. Летунов. Образование сверхплотной плазмы при СВЧ пробое диэлектриков // Прикладная физика. 2005. №6. С.40-51.

57. V. A. Ivanov, M. E. Konyzhev, V. P. Gavrilenko, E. Oks, A. A. Letunov. Creation of super dense plasma due to contracting of microwave discharge on surface of dielectric // In book: Strong Microwaves in plasmas. Ed. A.G. Litvak. V. 2. P.784-792. Nizhny Novgorod-2005. ISBN 5-8048-0039-X.

58. V.A. Ivanov, M.E. Konyzhev, V.P. Gavrilenko, E.A. Oks and A.A. Letunov Microwave discharges on the surfaces of dielectrics // In book: Microwave Discharges: fundamentals and applications. Ed. Yu.A. Lebedev. Published by “Yanus-K”. Moscow, 2006. Pp.233-238

59. Раваев А.А., Алфеев Е.Б., Есаков И.И., Пан Е.Г., Хоменко А.И., Богданов А.Г., Иванов В.А. О формировании переходного слоя на границе лейцитовой стеклокерамики и Ni-Cr, Co-Cr-сплавов при спекании в сильных электромагнитных полях // Прикладная физика, №6, 2008. С.69-78.
60. V.A. Ivanov, A.S. Sakharov, and M.E. Konyzhev Strong Microwave Absorption by a Filamentary Microwave Discharge Existed on a Dielectric Surface // In Book: "Strong Microwaves: sources and applications" (Proceedings of the VII International workshop, Nizhny Novgorod, 7 July- 2 August 2008). Edited by A.G. Litvak. Nizhny Novgorod: Institute of Applied Physics Russian Academy of Sciences, 2009. V.2. Pp. 620-624.
61. I.A.Kossyi, V.A.Ivanov, M.E.Konyzhev, V.E.Semenov, D.Anderson, J.Puech Metal-Dielectric Interface as a Low-Threshold Microwave Discharge Initiation in Waveguides and in a Free Space. Proceedings of the 6th International Workshop on Multipactor, Corona and Passive Intermodulation in Space RF Hardware (MULCOPIM-2008Workshop). 24-26 September 2008, Valencia, Spain, MP1-3.
62. V.A. Ivanov, A.S. Sakharov, and M.E. Konyzhev Strong Local Interaction of Microwave Discharges with Solid Dielectrics in Vacuum // In book: "Microwave discharges: Fundamentals and Applications". Edited by M. Kando and M. Nagatsu. Shizuoka University: 2010. Proceedings of the 7th International Workshop Microwave discharges: Fundamentals and Applications. CURREAC, Hamamatsu, Japan, September 22-27, 2009. Pp. 34-39. ISBN: 978-4-9905002-0-7 (JP: 21757181), (242p; 27cm).
63. А. С. Сахаров, В. А. Иванов, Ю. А. Тарбеева, М. Е. Коньжев "Теоретическое и экспериментальное исследование поглощения мощности СВЧ - излучения односторонним мультипакторным разрядом на поверхности диэлектрика" // Прикладная физика, 2011, № 6, с. 111-120
64. A.S. Sakharov, V.A. Ivanov, Yu.A. Tarbeeva, M.E. Konyzhev. Theoretical and experimental study of microwave power absorption by a single-sided

multipactor discharge on a dielectric // Plasma Physics Reports, 2012, Vol. 38, No. 13, Pp. 1098-1108

65. V.A. Ivanov, A.S. Sakharov, and M.E. Konyzhev Microwave Power Absorption by a Multipactor Discharge on a Dielectric Surface: Theory and Experiment // In Book "Microwave Discharges: Fundamentals and Applications". (Proceedings of the VIII International Workshop on Microwave Discharges: Fundamentals and Applications (MD-8). Zvenigorod, September 10-14, 2012. Moscow: Yanus-K, 2012. C. 75-80. (ISBN 978-5-8037-0570-3)

66. V.A. Ivanov, A.S. Sakharov, M.E. Konyzhev Two-Dimensional PIC Simulations of a Multipactor Discharge on a Dielectric in a Parallel-Plate Waveguide // In Book "Microwave Discharges: Fundamentals and Applications". (Proceedings of the VIII International Workshop on Microwave Discharges: Fundamentals and Applications (MD-8). Zvenigorod, September 10-14, 2012. Moscow: Yanus-K, 2012. C. 69-74. (ISBN 978-5-8037-0570-3)

67. A.S. Sakharov, V.A. Ivanov, and M.E. Konyzhev Multipactor Discharge on a Dielectric at Different Inclination Angles of the Microwave Electric Field Relative to the Dielectric Surface // Plasma Physics Reports, 2013, Vol. 39, No. 13, pp. 1104–1111.

68. А.С. Сахаров, В.А. Иванов, М.Е. Коньжев Численное моделирование методом частиц в ячейке мультипакторного разряда на диэлектрике в плоскопараллельном волноводе // Успехи прикладной физики. 2014. Том 2. В. 5. С. 476-485.

69. К.Ф. Сергейчев, В.В. Душик, В.А. Иванов, В.Г. Лаптева, Ю.В. Лахоткин, Н.А. Лукина, М.А. Борисенко, Л.В. Поддубная Газофазный плазмохимический синтез поликристаллического алмазного покрытия рабочей поверхности твердосплавных режущих инструментов в плазме факельного СВЧ-разряда (обзор) // Успехи прикладной физики. 2014г. Том 2. №5. С.453-475.

70. Vyacheslav A. Ivanov, Alexander S. Sakharov, and Mikhail E. Konyzhev Strong Local Interaction of Microwave Discharges With Solid Dielectrics in

Vacuum (TPS8172) // IEEE Transactions on Plasma Science. 2015. Volume 43. Issue 6. P. 1871 – 1878

71. A. S. Sakharov, V. A. Ivanov, and M. E. Konyzhev Particle-in-Cell Simulation of Multipactor Discharge on a Dielectric in a Parallel-Plate Waveguide // Plasma Physics Reports, 2016, Vol. 42, No. 6, pp. 610–618.

72. Vaughan J R M 1989 IEEE Trans. Electron Dev. **36** 1963.

73. V A Ivanov, A S Sakharov, M E Konyzhev, T I Kamolova, A A Dorofeyuk and L I Kuksenova Microplasma discharges excited by a plasma flow on constructional metals // Journal of Physics: Conf. Series 907 (2017) 012023 doi:10.1088/1742-6596/907/1/012023

74. Таблицы физических величин. Справочник. Под ред. акад. И.К. Кикоина. М., Атомиздат, 1976, 1008 с.

ЗАДАЧИ

Задача №1. Рассчитать значения максимальной и средней энергий электронов (в эВ) в потоке СВЧ излучения интенсивностью $I = 1 \text{ МВт/см}^2$, длиной волны $\lambda = 10 \text{ см}$. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь. Включение СВЧ излучения считать плавным: фронт нарастания СВЧ интенсивности медленный по сравнению с периодом СВЧ: $\tau_{\text{ф}} \gg T$.

Задача №2. Рассчитать диапазон энергий электронов (в эВ) в потоке лазерного излучения интенсивностью $I = 10^{16} \text{ Вт/см}^2$, длиной волны $\lambda = 1 \text{ мкм}$. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь. Передний фронт лазерного импульса составляет 0.83 фс , длительность импульса 100 фс , задний фронт 10 фс .

Задача №3. Рассчитать значение средней энергии электронов (в эВ) в потоке СВЧ излучения интенсивностью $I = 1 \text{ кВт/см}^2$, длиной волны $\lambda = 30 \text{ см}$. Взаимодействие происходит в высоком вакууме, и столкновения электронов с молекулами газа не учитывать. Включение СВЧ излучения считать плавным: фронт нарастания СВЧ интенсивности медленный по сравнению с периодом СВЧ: $\tau_{\text{ф}} \gg T$.

Задача №4. Рассчитать диапазон значений энергии электронов (в эВ) в потоке СВЧ излучения интенсивностью $I = 1000 \text{ Вт/см}^2$, длиной волны $\lambda = 20 \text{ см}$ в середине импульса и после прохождения импульса длительностью $\tau = 0.5 \text{ мкс}$. Передний фронт импульса равен 2 нс , задний фронт импульса равен 10 нс . В расчете пренебречь столкновениями электронов с атомами и молекулами газа.

Задача №5. Рассчитать диапазон энергий электронов (в эВ) в потоке лазерного излучения интенсивностью $I = 10^{13} \text{ Вт/см}^2$, длиной волны $\lambda = 10 \text{ мкм}$. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь. Передний фронт лазерного импульса составляет $\tau_{\text{пф}} = 8 \text{ фс}$, задний фронт 10 фс , длительность лазерного импульса 10 пс .

Задача №6. Рассчитать значение средней энергии электронов (в эВ) в потоке СВЧ излучения интенсивностью $I = 10 \text{ кВт/см}^2$, длиной волны $\lambda = 20 \text{ см}$. Считать, что взаимодействие происходит в высоком вакууме, и столкновения электронов с атомами и молекулами газа не учитывать. Включение СВЧ излучения считать плавным, т.е. фронт нарастания СВЧ интенсивности медленный по сравнению с периодом СВЧ $\tau_{\text{ф}} \gg T$.

Задача №7. Рассчитать значение средней энергии электронов (в эВ) в потоке и интервал ожидаемых энергий электронов после окончания импульсного СВЧ излучения интенсивностью $I = 1 \text{ кВт/см}^2$, длиной волны $\lambda = 20 \text{ см}$ в конце импульса длительностью $\tau = 0.5 \text{ мкс}$. Передний фронт импульса равен $\tau_{\text{пф}} = 0.1 \text{ мкс}$, задний фронт равен $\tau_{\text{зф}} = 0.5 \text{ нс}$. Столкновения электронов с молекулами фонового газа не учитывать.

Задача №8. Рассчитать диапазон энергий электронов (в эВ) в потоке импульсного СВЧ излучения интенсивностью $I = 10 \text{ кВт/см}^2$, длиной волны $\lambda = 30 \text{ см}$. Длительность импульса 10 мкс , передний фронт импульса 1 нс , задний фронт 10 нс . В расчете пренебречь столкновениями электронов с атомами и молекулами газа.

Задача №9. Рассчитать диапазон возможных энергий электронов (в эВ) в потоке и после окончания импульсного СВЧ излучения интенсивностью $I = 100 \text{ кВт/см}^2$ и длиной волны $\lambda = 10 \text{ см}$. Длительность импульса 10 мкс , передний фронт импульса 1 нс , задний фронт 1 нс . В расчете рассмотреть случай отсутствия столкновений электронов с атомами и молекулами газа.

Задача №10. Рассчитать среднюю энергию электронов (в эВ) в потоке и после окончания импульсного СВЧ излучения интенсивностью $I = 10 \text{ кВт/см}^2$ и длиной волны $\lambda = 30 \text{ см}$. Длительность импульса 10 мкс , передний фронт импульса 10 нс , задний фронт 1 нс . В расчете столкновения электронов с атомами и молекулами газа не учитывать.

Задача №11. Электроны возникают в фокусе СВЧ излучения в момент существования СВЧ поля. Длина волны излучения 30 см . Концентрация

электронов меньше критической, и плазма прозрачна для излучения. Мощность импульса СВЧ излучения 10 МВт, длительность импульса 1 мкс, распределение интенсивности в фокусе близко к распределению Гаусса с характерным диаметром 22 см. Рассчитать максимальное значение энергии электронов (в эВ) в фокусе в течение длительности импульса СВЧ излучения. Столкновения электронов с атомами и молекулами газа не учитывать.

Задача №12. Рассчитать диапазон энергии электронов (в эВ) в потоке импульсного СВЧ излучения интенсивностью $I = 1 \text{ МВт/см}^2$, длиной волны $\lambda = 3 \text{ см}$. Длительность импульса 1 мкс, передний фронт импульса 1 нс, задний фронт 1 нс. В расчете рассмотреть случай отсутствия столкновений электронов с атомами и молекулами газа.

Задача №13. Электроны малой концентрации постоянно возникают в центре фокуса линейно поляризованного СВЧ излучения в момент существования СВЧ поля. Мощность импульса СВЧ излучения 100 МВт, длина волны 2 см, длительность импульса 1 мкс, длительность переднего и заднего фронта равны 10 нс, распределение интенсивности в фокусе близко к распределению Гаусса с характерным диаметром 10 см. Рассчитать максимальное значение энергии электронов (в эВ), вылетающих из фокуса в направлении перпендикулярном электрической компоненте СВЧ поля в течение длительности импульса СВЧ излучения. Доказать возможность применения теории ВЧ-квазипотенциала. В расчете столкновения электронов с атомами и молекулами газа не учитывать.

Задача №14. Электроны малой концентрации постоянно возникают в фокусе линейно поляризованного СВЧ излучения в момент существования СВЧ поля. Мощность импульса СВЧ излучения 10 МВт, длина волны 4 см, длительность импульса 10 мкс, распределение интенсивности в фокусе близко к распределению Гаусса с характерным диаметром 5 см. Длительности переднего и заднего фронтов составляют 50 нс и 100 нс соответственно. Рассчитать максимальное значение энергии (в эВ)

электронов, вылетающих из фокуса в течение длительности импульса СВЧ излучения в направлении, перпендикулярном электрической компоненте СВЧ поля. Доказать применимость теории ВЧ-квазипотенциала. В расчете пренебречь столкновениями электронов с атомами и молекулами фонового газа.

Задача №15. Рассчитать диапазон энергий электронов (в эВ) в потоке лазерного излучения интенсивностью $I = 10^{16}$ Вт/см², длиной волны $\lambda=0.5$ мкм (2-я гармоника неодимового лазера), длительность импульса 100 фс. Передний и задний фронты лазерного импульса равны 10 фс. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №16. Рассчитать диапазон энергий электронов (в эВ) в потоке лазерного излучения интенсивностью $I = 10^{17}$ Вт/см², длиной волны $\lambda=0,25$ мкм (4-я гармоника неодимового лазера). Включение и выключение лазерного излучения считать плавным: фронт нарастания интенсивности медленный по сравнению с периодом поля: $\tau_{\phi} \gg T$. Столкновениями электронов с молекулами фонового газа пренебречь.

Задача №17. На облако плазмы с концентрацией существенно меньше критической падает сфокусированное импульсное СВЧ излучение с линейной частотой осцилляций 2 ГГц. Мощность импульса составляет 10 МВт, длительность импульса 10 мкс, длительность переднего фронта 0.05 мкс, длительность заднего фронта 0.1 мкс. Считая распределение интенсивности СВЧ излучения гауссовым с характерным радиусом $a = 10$ см, оценить максимальную энергию осцилляции электронов (в эВ) течение импульса и после окончания импульса СВЧ излучения. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №18. На облако плазмы с концентрацией, существенно меньшей критической, падает сфокусированное импульсное СВЧ излучение с линейной частотой осцилляций 12 ГГц. Мощность импульса составляет 10 МВт, длительность импульса 1 мкс, длительность переднего фронта 0.01 мкс,

длительность заднего фронта 0.01 мкс. Считая распределение интенсивности СВЧ излучения близким к распределению Гаусса с характерным радиусом $a = 2$ см, оценить максимальную энергию осцилляции электронов (в эВ) в потоке СВЧ излучения в течение импульса. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №19. На облако плазмы с концентрацией меньше критической падает сфокусированное импульсное СВЧ излучение с линейной частотой осцилляций 10 ГГц. Мощность импульса составляет 1 ГВт, длительность импульса 0.5 микросекунды, длительность переднего фронта 0.01 мкс, длительность заднего фронта 0.01 мкс. Считая распределение интенсивности СВЧ излучения гауссовым с характерным радиусом $a = 1.5$ см, оценить максимальную энергию осцилляции электронов (в эВ) в течение импульса и после окончания импульса СВЧ излучения. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №20. Рассчитать величину энергетического барьера ВЧ-квазипотенциала (в эВ), возникающего для электронов при прохождении вдоль широкой стенки прямоугольного волновода с поперечными размерами 12 см×6 см (широкая стенка $b=12$ см, узкая стенка $a = 6$ см) при прохождении СВЧ мощности 100 МВт с линейной частотой 2 ГГц. В расчетах считать, что пространственное распределение электрического поля вдоль широкой стенки волновода для моды H_{10} определяется по формуле $E=E_0\sin(\pi X/b)$. Распределение поля вдоль узкой стенки считать однородным. Групповая скорость распространения излучения в волноводе рассчитывается по формуле $V_g = c\sqrt{1-(\frac{\lambda}{2b})^2}$, где λ – длина СВЧ волны в свободном пространстве. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №21. Рассчитать величину энергетического барьера ВЧ-квазипотенциала (в эВ), возникающего для электронов при прохождении вдоль широкой стенки прямоугольного волновода с поперечными размерами 9 см×4.5 см (широкая стенка $b = 9$ см, узкая стенка $a = 4.5$ см) при

прохождении СВЧ мощности 200 МВт с линейной частотой 3 ГГц. В расчетах считать, что пространственное распределение электрического поля вдоль узкой стенки однородно, а вдоль широкой стенки волновода для моды H_{10} определяется по формуле $E = E_0 \sin(\pi X/b)$. Групповая скорость распространения излучения в волноводе рассчитывается по формуле $V_g = c \sqrt{1 - (\frac{\lambda}{2b})^2}$, λ – длина СВЧ волны в свободном пространстве.

Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №22. Определить возможность прохождения электронного пучка с энергией электронов 0.1 кэВ, направляемых перпендикулярно оси и через центр фокуса СВЧ луча вследствие возникновения ВЧ-квазипотенциального барьера в сфокусированном потоке СВЧ излучения мощностью 100 МВт и длиной волны 3 см. Считать распределение интенсивности СВЧ излучения в фокусе гауссовым с характерным радиусом 3 см. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №23. Определить возможность прохождения электронного пучка с энергией электронов 500 эВ через фокус СВЧ пучка вследствие возникновения ВЧ-квазипотенциального барьера в сфокусированном потоке СВЧ излучения мощностью 10 МВт и длиной волны 16 см. Считать распределение интенсивности СВЧ излучения в фокусе гауссовым с характерным радиусом $a = 11$ см. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №24. Электроны постоянно возникают в фокусе линейно поляризованного СВЧ излучения в момент существования СВЧ поля. Длина волны излучения 16 см. Концентрация электронов меньше критической. Мощность импульса СВЧ излучения 10 МВт, длительность импульса 1 мкс, распределение интенсивности в фокусе близко к распределению Гаусса с характерным диаметром 22 см. Рассчитать максимальное значение энергии электронов (в эВ), вылетевших из фокуса в направлении, перпендикулярном электрическому СВЧ полю в течение длительности импульса СВЧ

излучения. Доказать возможность применения теории ВЧ-квазипотенциала. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №25. Электроны возникают в фокусе СВЧ излучения. Длина волны СВЧ излучения 3 см. Концентрация электронов существенно меньше критической. Мощность импульса СВЧ излучения 100 МВт, длительность импульса 0.05 мкс, длительность переднего и заднего фронтов СВЧ импульса равны 0.01 мкс, распределение интенсивности в фокусе близко к распределению Гаусса с характерным диаметром 6 см. Рассчитать ожидаемое максимальное значение энергии (в эВ) электронов, вылетевших из фокуса в течение длительности импульса СВЧ излучения. Доказать возможность применения теории ВЧ-квазипотенциала. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №26. Электроны возникают в фокусе линейно поляризованного СВЧ излучения длиной волны 8 см. Концентрация электронов существенно меньше критической. Мощность импульса СВЧ излучения 60 МВт, длительность импульса 0.05 мкс, длительность переднего и заднего фронтов СВЧ импульса равны 0.01 мкс, распределение интенсивности в фокусе близко к распределению Гаусса с характерным диаметром 6 см. Рассчитать максимальное ожидаемое значение энергии (в эВ) электронов, вылетевших из фокуса в течение длительности импульса СВЧ излучения как вдоль электрической так и магнитной компонент. Доказать возможность применения теории ВЧ-квазипотенциала. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №27. Определить минимальное пороговое значение напряженности электрического поля (в В/см) и длины разрядных промежутков для резонансных вторично-эмиссионных разрядов (мультипактор) кратности 1, 3 и 5, развивающихся между алюминиевыми пластинами в поле СВЧ излучения с линейной частотой осцилляции 2 ГГц. Для алюминия принять величину первого критического потенциала равным 100 эВ. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №28. Определить минимальное пороговое значение напряженности электрического поля в В/см и длины разрядных промежутков для резонансного вторично-эмиссионного разряда (мультипактора) кратности 1, 3, 5, развивающихся между молибденовыми пластинами в поле СВЧ излучения длиной волны 9 см. Для молибдена принять величину первого критического потенциала равным 150 эВ. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №29. Определить минимальную пороговую интенсивность СВЧ излучения (в Вт/см²) длиной волны 15 см для возбуждения в вакууме нерезонансного вторично-эмиссионного электронного разряда (мультипактора) на поверхности монокристаллического кварца при значении первого критического потенциала кварца 20 эВ. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №30. Определить минимальную пороговую интенсивность СВЧ излучения (в Вт/см²) длиной волны 1 см для возбуждения в вакууме нерезонансного вторично-эмиссионного электронного разряда (мультипактора) на поверхности входного окна из монокристаллического фторида кальция при значении первого критического потенциала 26 эВ. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №31. Определить пороговую интенсивность СВЧ излучения (в Вт/см²) длиной волны 8 мм для возбуждения в вакууме нерезонансного вторично-эмиссионного электронного разряда (мультипактора) на поверхности входного окна из фианита (монокристалл диоксида циркония) при значении первого критического потенциала 500 эВ. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №32. Рассчитать значение средней энергии электронов (в эВ) в потоке импульсного СВЧ излучения интенсивностью $I = 1 \text{ кВт/см}^2$, длиной волны $\lambda = 20 \text{ см}$ в конце импульса длительностью $\tau = 0.5 \text{ мкс}$. Длительность переднего и заднего фронтов импульса составляет 0.01 мкс . Столкновения электронов с молекулами газа не учитывать.

Задача №33. Электроны возникают в фокусе СВЧ излучения в момент существования СВЧ поля. Концентрация электронов меньше критической. Мощность импульса СВЧ излучения 100 МВт , длина волны 2 см , длительность импульса 1 мкс , длительность переднего и заднего фронтов импульса составляет 0.01 мкс , распределение интенсивности в фокусе близко к распределению Гаусса с характерным диаметром 10 см . Рассчитать максимальное значение энергии электронов (в эВ) в фокусе в течение длительности импульса СВЧ излучения. Столкновения электронов с молекулами газа не учитывать.

Задача №34. На плазму с концентрацией существенно меньшей критической падает сфокусированное импульсное СВЧ излучение с линейной частотой осцилляций 12 ГГц . Мощность импульса составляет 10 МВт , длительность импульса 1 мкс , длительность переднего фронта 0.01 мкс , длительность заднего фронта 0.01 мкс . Считая распределение интенсивности СВЧ излучения гауссовым с характерным радиусом $a = 2 \text{ см}$, оценить максимальную энергию осцилляции электронов (в эВ) в течение импульса и сразу после окончания импульса СВЧ излучения. Столкновения электронов с молекулами газа не учитывать.

Задача №35. Определить минимальное пороговое значение напряженности электрического поля (в В/см) и длину разрядного промежутка для резонансного вторично-эмиссионного разряда (мультипактора) кратности 1, развивающегося между алюминиевыми пластинами в поле СВЧ излучения с линейной частотой 2 ГГц . Рассчитать инкремент нарастания электронной лавины в разряде при превышении электрического поля над пороговым

значением на 10%. Рассчитать число электронов в лавине разряда через 20 нс после появления первого электрона. Для алюминия принять величину первого критического потенциала W_1 равным 100 эВ, зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии от энергии электронов аппроксимировать линейной функцией вида $\sigma = \frac{\varepsilon_e}{W_1}$. Столкновения электронов с молекулами газа не учитывать.

Задача №36. Определить пороговое значение напряженности электрического поля (в В/см) и длину разрядного промежутка для резонансного вторично-эмиссионного разряда (мультипактора) кратности 1, развивающегося в вакууме между молибденовыми пластинами в поле СВЧ излучения с линейной частотой 3 ГГц. Рассчитать инкремент нарастания электронной лавины в разряде при превышении электрического поля над пороговым значением в 2 раза. Рассчитать число электронов в лавине разряда через 5 нс после появления первого электрона. Для молибдена принять величину первого критического потенциала равным 150 эВ, зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии от энергии электронов аппроксимировать линейной функцией вида $\sigma = \frac{\varepsilon_e}{W_1}$.

Задача №37. Определить пороговую интенсивность СВЧ излучения (в Вт/см²) длиной волны 5 см для возбуждения в вакууме нерезонансного вторично-эмиссионного электронного разряда (мультипактора) на поверхности монокристаллического кварца при значении первого критического потенциала кварца равным 20 эВ. Столкновения электронов с молекулами газа не учитывать.

Задача №38. Определить пороговую интенсивность СВЧ излучения (в Вт/см²) длиной волны 3 см для возбуждения в вакууме нерезонансного вторично-эмиссионного электронного разряда (мультипактора) на поверхности входного окна из монокристаллического фторида кальция при

значении первого критического потенциала равным 36 эВ. Столкновения электронов с молекулами газа не учитывать.

Задача №39. Определить пороговую интенсивность СВЧ излучения (в Вт/см²) длиной волны 1.8 см для возбуждения в вакууме нерезонансного вторично-эмиссионного электронного разряда (мультипактора) на поверхности входного окна из фианита (монокристалл диоксида циркония) при значении первого критического потенциала на поверхности фианита равного 500 эВ. Столкновения электронов с молекулами газа не учитывать.

Задача №40. Определить минимальное пороговое значение напряженности электрического поля (в В/см) и длину разрядного промежутка для резонансного вторично-эмиссионного разряда (мультипактора) кратности 3, развивающегося между алюминиевыми пластинами в поле СВЧ излучения длиной волны 16 см. Рассчитать инкремент нарастания электронной лавины в разряде при превышении электрического поля над пороговым значением в 3 раза. Рассчитать число электронов в лавине разряда через 5 нс после появления первого электрона. Для алюминия принять величину первого критического потенциала равным $W_1 = 100$ эВ, зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии от энергии электронов аппроксимировать линейной функцией вида $\sigma = \frac{\varepsilon_e}{W_1}$. Столкновения электронов с молекулами газа не учитывать.

Задача №41. Определить пороговое значение напряженности электрического поля (в В/см) и длину разрядного промежутка для резонансного вторично-эмиссионного разряда (мультипактора) кратности 5, развивающегося в вакууме между металлическими пластинами в поле СВЧ излучения длиной волны 10 см. Рассчитать инкремент нарастания электронной лавины в разряде при превышении электрического поля над пороговым значением в 2 раза. Рассчитать число электронов в разряде через 20 нс после появления первого электрона. Для металла пластин принять величину первого критического потенциала равным 180 эВ, зависимость коэффициента

вторичной электронной эмиссии от энергии электронов аппроксимировать линейной функцией вида $\sigma = \frac{\varepsilon_e}{W_1}$.

Задача №42. Определить минимальное пороговое значение напряженности электрического поля (в В/см) и длину разрядного промежутка для резонансного вторично-эмиссионного разряда (мультипактора) кратности 7, развивающегося в вакууме между алюминиевыми пластинами в поле СВЧ излучения длиной волны 6 см. Рассчитать инкремент нарастания электронной лавины в разряде при превышении электрического поля над пороговым значением в 1.5 раза. Рассчитать число электронов в разряде через 15 нс после появления первого электрона. Для алюминия принять величину первого критического потенциала равным 100 эВ, зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии от энергии электронов аппроксимировать линейной функцией вида $\sigma = \frac{\varepsilon_e}{W_1}$.

Задача №43. Рассчитать диапазон энергий электронов (в эВ) в потоке лазерного излучения интенсивностью $I = 10^{15}$ Вт/см², длиной волны $\lambda = 1$ мкм, длительностью 100 нс. Передний и задний фронты импульса равны 1 нс. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №44. Рассчитать значение средней энергии электронов (в эВ) в потоке СВЧ излучения интенсивностью $I = 15$ кВт/см², длиной волны $\lambda = 30$ см. Взаимодействие происходит в высоком вакууме, и столкновения с молекулами газа не учитывать. Включение СВЧ излучения считать плавным, т.е. фронт нарастания СВЧ интенсивности медленный по сравнению с периодом СВЧ $\tau_\phi \gg T$.

Задача №45. Рассчитать диапазон значений энергии электронов (в эВ) в потоке СВЧ излучения интенсивностью $I = 3000$ Вт/см², длиной волны $\lambda = 20$ см в середине импульса и после прохождения импульса длительностью $\tau = 0.5$ мкс. Передний фронт импульса равен 2 нс, задний фронт импульса равен 10 нс. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №46. Рассчитать диапазон энергий электронов (в эВ) в потоке лазерного излучения интенсивностью $I = 10^{14}$ Вт/см², длиной волны $\lambda=10$ мкм, длительность импульса 1 пс. Передний фронт импульса равен 8.3фс, задний фронт 300 фс. Столкновениями с молекулами газа пренебречь.

Задача №47. Рассчитать значение средней энергии электронов (в эВ) в потоке СВЧ излучения интенсивностью $I = 12$ кВт/см², длиной волны $\lambda=12$ см. Считать, что взаимодействие происходит в высоком вакууме и столкновения с атомами и молекулами газа не учитывать. Включение СВЧ излучения считать плавным, т.е. фронт нарастания СВЧ интенсивности медленный по сравнению с периодом СВЧ $\tau_{\phi} \gg T$.

Задача №48. Рассчитать значение средней энергии электронов в потоке импульсного СВЧ излучения интенсивностью $I = 10$ кВт/см², длиной волны $\lambda= 20$ см течение импульса длительностью $\tau = 0.05$ мкс. Передний и задний фронты импульса равны 1 нс. Столкновения с молекулами газа не учитывать.

Задача №49. Рассчитать энергии электронов (в эВ) в потоке импульсного СВЧ излучения интенсивностью $I = 20$ кВт/см², длиной волны $\lambda = 25$ см. Длительность импульса 10 мкс, передний фронт импульса 1 нс, задний фронт 10 нс. Столкновения электронов с атомами и молекулами газа не учитывать.

Задача №50. Рассчитать энергии электронов (в эВ) в потоке и сразу после окончания импульсного СВЧ излучения интенсивностью $I = 100$ кВт/см², длиной волны $\lambda = 15$ см. Длительность импульса 10 мкс, передний фронт импульса 0,125 нс, задний фронт 0,1 нс. Столкновения электронов с атомами и молекулами газа не учитывать.

Задача №51. Рассчитать энергии электронов (в эВ) в потоке и после окончания импульсного СВЧ излучения интенсивностью $I = 10$ кВт/см² и длиной волны $\lambda = 24$ см. Длительность импульса 10 мкс, передний фронт импульса 1 нс, задний фронт 10 нс. Столкновения электронов с атомами и молекулами газа не учитывать.

Задача №52. На плазму с концентрацией существенно меньшей критической падает сфокусированное импульсное СВЧ излучение с линейной частотой осцилляций 2 ГГц. Мощность импульса составляет 10 МВт, длительность импульса 10 микросекунд, длительность переднего фронта 0.05 мкс, длительность заднего фронта 0.1 мкс. Считая распределение интенсивности СВЧ излучения гауссовым с характерным радиусом 10 см, оценить максимальную энергию (в эВ) электронов в потоке излучения в течение импульса и после окончания импульса СВЧ излучения. Столкновения электронов с атомами и молекулами газа не учитывать.

Задача №53. Определить минимальное пороговое значение напряженности электрического поля (в В/см) и длину разрядного промежутка для резонансного вторично-эмиссионного разряда (мультипактора) кратности 7, развивающегося между алюминиевыми пластинами в поле СВЧ излучения длиной волны 16 см. Рассчитать инкремент нарастания электронной лавины в разряде при превышении электрического поля над пороговым значением в 1.2 раза. Рассчитать число электронов в лавине разряда через 10 нс после появления первого электрона. Для алюминия принять величину первого критического потенциала равным $W_1 = 100$ эВ, зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии от энергии электронов аппроксимировать линейной функцией вида $\sigma = \frac{\varepsilon_e}{W_1}$. Столкновения электронов с молекулами газа не учитывать.

Задача №54. Электроны возникают в фокусе СВЧ излучения в момент существования СВЧ поля. Концентрация электронов меньше критической. Мощность импульса СВЧ излучения 10 МВт, длина волны 16 см, длительность импульса 1 мкс. Распределение интенсивности в фокусе близко к распределению Гаусса с характерным диаметром 22 см. Рассчитать максимальное значение энергии электронов (в эВ), вылетевших из фокуса в течение длительности импульса СВЧ излучения. Доказать возможность

применения теории ВЧ-квазипотенциала. Столкновениями электронов с молекулами газа пренебречь.

Задача №55. Определить минимальное пороговое значение напряженности электрического поля (в В/см) и длину разрядного промежутка для резонансного вторично-эмиссионного разряда (мультипактора) кратности 1, развивающегося между танталовыми пластинами в поле СВЧ излучения линейной частотой 3 ГГц. Рассчитать инкремент нарастания электронной лавины в разряде при превышении электрического поля над пороговым значением в 1.25 раза. Рассчитать число электронов в лавине разряда через 5 нс после появления первого электрона. Для тантала принять величину первого критического потенциала равным $W_1 = 180$ эВ, зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии от энергии электронов аппроксимировать линейной функцией вида $\sigma = \frac{\varepsilon_e}{W_1}$. Столкновения электронов с молекулами газа не учитывать.

Задача №56. Определить минимальное пороговое значение напряженности электрического поля (в В/см) и длину разрядного промежутка для резонансного вторично-эмиссионного разряда (мультипактора) кратности 9, развивающегося между алюминиевыми пластинами в поле СВЧ излучения длиной волны 16 см. Для алюминия принять величину первого критического потенциала равным $W_1 = 100$ эВ. Рассчитать инкремент нарастания электронной лавины в разряде при превышении электрического поля над пороговым значением в 1.8 раза. Рассчитать число электронов в лавине разряда через 50 нс после появления первого электрона. Зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии от энергии электронов аппроксимировать линейной функцией вида $\sigma = \frac{\varepsilon_e}{W_1}$. Столкновения электронов с молекулами газа не учитывать.

Задача №57. Определить минимальное пороговое значение напряженности электрического поля (в В/см) и длину разрядного промежутка для

резонансного вторично-эмиссионного разряда (мультипактора) кратности 9, развивающегося между медными пластинами в поле СВЧ излучения длиной волны 14 см. Для меди принять величину первого критического потенциала равным $W_1 = 140$ эВ. Рассчитать инкремент нарастания электронной лавины в разряде при превышении электрического поля над пороговым значением в 2 раза. Рассчитать число электронов в лавине разряда через 18 нс после появления первого электрона. Зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии от энергии электронов аппроксимировать линейной функцией вида $\sigma = \frac{\varepsilon_e}{W_1}$. Столкновения электронов с молекулами газа не учитывать.

Задача №58. Определить минимальное пороговое значение напряженности электрического поля (в В/см) и длину разрядного промежутка для резонансного вторично-эмиссионного разряда (мультипактора) кратности 7, развивающегося между танталовыми пластинами в поле СВЧ излучения длиной волны 10 см. Для тантала принять величину первого критического потенциала равным 180 эВ. Рассчитать инкремент нарастания электронной лавины в разряде при превышении электрического поля над пороговым значением в 1.2 раза. Рассчитать число электронов в лавине разряда через 60нс после появления первого электрона. Зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии от энергии электронов аппроксимировать линейной функцией вида $\sigma = \frac{\varepsilon_e}{W_1}$. Столкновения электронов с молекулами газа не учитывать.

Задача №59. Рассчитать диапазон энергий электронов (в эВ) в потоке лазерного излучения интенсивностью $I = 10^{13}$ Вт/см², длиной волны $\lambda=10$ мкм. Столкновениями с молекулами газа пренебречь. Передний фронт импульса равен 8,3 фемтосекунды, задний фронт равен 1 пс, длительность импульса 150 нс.

Задача №60. Электроны возникают в фокусе линейно поляризованного СВЧ излучения в момент существования СВЧ поля после прохождения переднего фронта импульса. Начальную энергию электронов считать равной нулю. Мощность импульса СВЧ излучения равна 200 МВт, длина волны излучения $\lambda = 4$ см, длительность импульса 10 мкс, распределение интенсивности в фокусе считать близким к распределению Гаусса с характерным диаметром 10 см. Рассчитать максимальное значение энергии электронов (в эВ) в фокусе СВЧ луча в течение импульса излучения, и оценить максимальное значение энергии электронов (в эВ), вылетевших из фокуса СВЧ луча в направлении электрического поля и в направлении магнитного поля СВЧ излучения. Режим включения и выключения СВЧ поля считать плавным. Столкновениями электронов с атомами и молекулами фонового газа пренебречь.

Задача №61. Электроны возникают в фокусе СВЧ излучения в момент существования СВЧ поля. Концентрация электронов меньше критической. Мощность импульса СВЧ излучения 10 МВт, длина волны 6 см, длительность импульса 10 мкс, распределение интенсивности в фокусе близко к распределению Гаусса с характерным диаметром 5 см. Длительности переднего и заднего фронтов составляют 50 нс и 100 нс соответственно. Рассчитать максимальное значение энергии электронов (в эВ) в фокусе в течение импульса СВЧ излучения. Рассчитать ожидаемую энергию электронов (в эВ), вылетевших из фокуса в течение действия СВЧ импульса. Столкновениями электронов с атомами пренебречь.

Задача №62. Рассчитать диапазон энергий электронов (в эВ) в потоке лазерного излучения интенсивностью $I = 10^{16}$ Вт/см², длиной волны $\lambda=0.5$ мкм (2-я гармоника неодимового лазера), длительностью импульса 100 фс. Передний и задний фронты лазерного импульса равны 1 фс. Столкновениями с молекулами газа пренебречь.

Задача №63. Определить минимальные пороговые значения напряженности электрического поля (в В/см) и длины разрядных промежутков для резонансного вторично-эмиссионного разряда кратности 7, развивающегося между металлическими пластинами в поле СВЧ излучения длиной волны 16 см. Для металла принять величину первого критического потенциала равным $W_1 = 80$ эВ. Рассчитать инкремент нарастания электронной лавины в разряде при превышении электрического поля над пороговым значением в 1.4 раза. Рассчитать число электронов в лавине разряда через 42 нс после появления первого электрона. Зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии от энергии электронов аппроксимировать линейной функцией вида $\sigma = \frac{\varepsilon_e}{W_1}$. Столкновения электронов с молекулами газа не учитывать.

Задача №64. Определить минимальные пороговые значения напряженности электрического поля (в В/см) и длины разрядного промежутка для резонансного вторично-эмиссионного разряда (мультипактора) кратности 9, развивающегося между титановыми пластинами в поле СВЧ излучения длиной волны 9 см. Для титана принять величину первого критического потенциала равным $W_1 = 150$ эВ. Рассчитать инкремент нарастания электронной лавины в разряде при превышении электрического поля над пороговым значением в 1.6 раза. Рассчитать число электронов в лавине разряда через 19 нс после появления первого электрона. Зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии от энергии электронов

аппроксимировать линейной функцией вида $\sigma = \frac{\varepsilon_e}{W_1}$. Столкновения электронов с молекулами фонового газа не учитывать.

Задача №65. Определить пороговую интенсивность СВЧ излучения (в Вт/см²) длиной волны 15 см для возбуждения в вакууме нерезонансного вторично-эмиссионного электронного разряда (мультипактора) на поверхности монокристаллического кварца при значении первого критического потенциала кварца равным 20 эВ. Столкновения электронов с молекулами фонового газа не учитывать.

Задача №66. Определить пороговую интенсивность СВЧ излучения (в Вт/см²) длиной волны 6 см для возбуждения в вакууме нерезонансного вторично-эмиссионного электронного разряда (мультипактора) на поверхности входного окна из монокристаллического флюорита при значении первого критического потенциала равным 36 эВ. Столкновения электронов с молекулами фонового газа не учитывать.

Задача №67. Определить пороговую интенсивность СВЧ излучения (Вт/см²) длиной волны 5 см для возбуждения в вакууме нерезонансного вторично-эмиссионного электронного разряда (мультипактора) на поверхности входного окна из фианита (монокристалл диоксида циркония) при значении первого критического потенциала на поверхности фианита равного 500 эВ. Столкновения электронов с молекулами газа не учитывать.

Задача №68. Определить минимальное пороговое значение напряженности электрического поля и длины разрядного промежутка для резонансного вторично-эмиссионного разряда (мультипактора) кратности 1, 3 и 5, развивающегося между алюминиевыми пластинами в поле СВЧ излучения длиной волны 16 см. Для алюминия принять величину первого критического потенциала равным 100 эВ. Столкновения электронов с молекулами фонового газа не учитывать.

Задача 69. Рассчитать величину средней осцилляторной энергии электронов в потоке СВЧ излучения интенсивностью 1 МВт/см² и длиной волны 1 см в

постоянном однородном магнитном поле с величиной индукции $B = 1$ Тл. Вектор магнитной индукции и электрической компоненты СВЧ волны взаимно ортогональны.

Задача 70. Рассчитать величину средней осцилляторной энергии электронов в потоке СВЧ излучения длиной волны 3 см и интенсивностью 0.5 МВт/см^2 в постоянном однородном магнитном поле с величиной индукции $B = 5$ кГс. Вектор магнитной индукции и электрической компоненты СВЧ волны взаимно ортогональны.

Задача 71. Рассчитать величину средней осцилляторной энергии электронов в потоке СВЧ излучения длиной волны 10 см и интенсивностью 50 кВт/см^2 в постоянном однородном магнитном поле с величиной индукции $B = 2$ кГс. Вектор магнитной индукции и электрической компоненты СВЧ волны взаимно ортогональны.

Задача 72. Рассчитать величину средней осцилляторной энергии электронов в потоке СВЧ излучения длиной волны 16 см и интенсивностью 10 кВт/см^2 в постоянном однородном магнитном поле с величиной индукции $B = 1$ кГс. Вектор магнитной индукции и электрической компоненты СВЧ волны взаимно ортогональны.

Задача 73. Рассчитать величину средней осцилляторной энергии электронов в потоке СВЧ излучения длиной волны 20 см и интенсивностью 20 кВт/см^2 в постоянном однородном магнитном поле с величиной индукции $B = 500$ Гс. Вектор магнитной индукции и электрической компоненты СВЧ волны взаимно ортогональны.

Задача 74. Рассчитать величину средней осцилляторной энергии электронов в потоке СВЧ излучения длиной волны 30 см и интенсивностью 30 кВт/см^2 в постоянном однородном магнитном поле с величиной индукции $B = 330$ Гс. Вектор магнитной индукции и электрической компоненты СВЧ волны взаимно ортогональны.

Задача 75. Рассчитать интервал значений индукции постоянного однородного магнитного поля, при котором величина средней

осцилляторной энергии электронов в потоке СВЧ излучения длиной волны 12 см и интенсивностью 10 кВт/см^2 составит более 10 кэВ. Вектор магнитной индукции и электрической компоненты СВЧ волны взаимно ортогональны.

Задача 76. Рассчитать интервал значений индукции постоянного однородного магнитного поля, при котором величина средней осцилляторной энергии электронов в потоке СВЧ излучения длиной волны 10 см и интенсивностью 100 кВт/см^2 составит более 100 кэВ. Вектор магнитной индукции и электрической компоненты СВЧ волны взаимно ортогональны.

Задача 77. Рассчитать величину высокочастотного квазипотенциала для электронов в сфокусированном потоке СВЧ излучения линейной поляризации длиной волны $\lambda = 3 \text{ см}$ и мощностью 100 кВт в присутствии постоянного однородного магнитного поля с величиной индукции магнитного поля 0.1Т. Вектор постоянного магнитного поля ориентирован по оси OY . Электрическая компонента СВЧ излучения коллинеарна оси OX , магнитная СВЧ компонента коллинеарна оси OY . СВЧ излучение распространяется по оси OZ . В фокусе реализуется гауссово распределение интенсивности излучения с характерным радиусом $a = 3 \text{ см}$.

Задача 78. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 680 \text{ Гс}$ фокусируется линейно поляризованное СВЧ излучение длиной волны $\lambda=16\text{см}$ и мощностью $P = 10 \text{ МВт}$. Постоянное магнитное поле ориентировано вдоль оси распространения СВЧ излучения OZ . Электрическая компонента СВЧ излучения коллинеарна оси OX . Распределение интенсивности в фокусе излучения считать гауссовым с характерным радиусом $a = 11 \text{ см}$. Определить прозрачность возникающего в фокусе энергетического барьера для электронного пучка электронов, инжектируемого вдоль оси OZ с энергией 1000 эВ.

Задача 79. В постоянном однородном магнитном поле с индукцией $B = 660 \text{ Гс}$ фокусируется линейно поляризованное СВЧ излучение длиной волны

$\lambda=16\text{см}$ и мощностью $P = 10 \text{ МВт}$. Постоянное однородное магнитное поле ориентировано вдоль оси распространения СВЧ излучения OZ . Электрическая компонента СВЧ излучения коллинеарна оси OX . Распределение интенсивности в фокусе излучения считать гауссовым с характерным радиусом $a = 11 \text{ см}$. Определить прозрачность возникающего в фокусе энергетического СВЧ барьера для электронов с энергией 2000 эВ , инжектируемых вдоль оси OY .

Задача 80. В постоянном однородном магнитном поле с индукцией $B = 1000 \text{ Гс}$ фокусируется линейно поляризованное СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 5\text{см}$ и мощностью $P = 1 \text{ МВт}$. Магнитное поле ориентировано по оси OY и коолинеарно вектору магнитной компоненты СВЧ излучения. Электрическая компонента СВЧ излучения коллинеарна оси OX . Распределение интенсивности в фокусе излучения считать гауссовым с характерным радиусом $a = 3 \text{ см}$. Определить прозрачность возникающего в фокусе энергетического барьера для электронов с энергией 200 эВ , инжектируемых по оси OX .

Задача 81. В постоянном однородном магнитном поле с индукцией $B=1\text{Тесла}$ фокусируется линейно поляризованное СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 5 \text{ см}$ и мощностью $P = 1 \text{ МВт}$. Магнитное поле ориентировано вдоль оси OY и коллинеарно осциллирующему вектору магнитной компоненты СВЧ излучения. Электрическая компонента СВЧ излучения коллинеарна оси OX . Распределение интенсивности в фокусе излучения считать гауссовым с характерным радиусом $a = 5 \text{ см}$. Определить прозрачность возникающего в фокусе энергетического барьера для электронов с энергией 100 эВ , инжектируемых вдоль оси OY .

Задача 82. В постоянном однородном магнитном поле с индукцией $B=0.1\text{Тесла}$ фокусируется линейно поляризованное СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 1 \text{ см}$ и мощностью $P = 10 \text{ МВт}$. Магнитное поле ориентировано по

оси OZ и параллельно волновому вектору СВЧ излучения. Электрическая компонента СВЧ излучения коллинеарна оси OX . Распределение интенсивности в фокусе излучения считать гауссовым с характерным радиусом $a = 1$ см. Определить прозрачность возникающего в фокусе энергетического барьера для электронов с энергией 10 эВ, инжектируемых вдоль оси OZ .

Задача 83. В постоянном однородном магнитном поле с индукцией $B = 500$ Гс фокусируется линейно поляризованное СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 20$ см и мощностью $P = 0.5$ МВт. Магнитное поле ориентировано вдоль оси OY и коллинеарно вектору магнитной компоненты СВЧ излучения. Электрическая компонента СВЧ излучения коллинеарна оси OX . Распределение интенсивности в фокусе излучения считать гауссовым с характерным радиусом $a = 15$ см. Определить прозрачность возникающего в фокусе энергетического барьера для электронов с энергией 50 эВ, инжектируемых по оси OY .

Задача 84. В постоянном однородном магнитном поле с индукцией $B = 300$ Гс фокусируется линейно поляризованное СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 30$ см и мощностью $P = 10$ МВт. Магнитное поле ориентировано по оси OZ и параллельно волновому вектору СВЧ излучения. Электрическая компонента СВЧ излучения коллинеарна оси OX . Распределение интенсивности в фокусе излучения считать гауссовым с характерным радиусом $a = 15$ см. Определить прозрачность возникающего в фокусе энергетического барьера для электронов с энергией 30 эВ, инжектируемых по оси OZ .

Задача 85. В постоянном однородном магнитном поле с индукцией $B = 600$ Гс фокусируется линейно поляризованное СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 25$ см и мощностью $P = 1$ МВт. Магнитное поле ориентировано по оси OZ и параллельно волновому вектору СВЧ излучения. Электрическая компонента СВЧ излучения коллинеарна оси OX . Распределение интенсивности в фокусе

излучения считать гауссовым с характерным радиусом $a = 10$ см. Определить прозрачность возникающего в фокусе энергетического барьера для пучка электронов, инжектируемых вдоль оси OZ с энергией 15 эВ.

Задача 86. В постоянном однородном магнитном поле с индукцией $B = 700$ Гс фокусируется линейно поляризованное СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 12$ см и мощностью $P = 10$ МВт. Магнитное поле ориентировано по оси OZ и параллельно волновому вектору СВЧ волны. Электрическая компонента СВЧ излучения коллинеарна оси OX . Распределение интенсивности в фокусе излучения считать гауссовым с характерным радиусом $a = 6$ см. Определить прозрачность возникающего в фокусе энергетического барьера для электронов с энергией 300 эВ, инжектируемых по оси OY .

Задача №87. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 8 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 35$ Тор. Рассчитать постоянную затухания волны в плазме, глубину проникновения СВЧ поля в плазму, длину СВЧ волны в плазме в области проникновения СВЧ поля, фазовую скорость волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме равна 3 см.

Задача №88. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 8 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 95$ Тор. Рассчитать постоянную затухания волны в плазме, глубину проникновения СВЧ поля в плазму, длину СВЧ волны в плазме в области проникновения СВЧ поля, фазовую скорость волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме равна 2 см.

Задача №89. СВЧ волна возбуждается в плазме с плотностью электронов $n_e = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 150$ Тор. Рассчитать постоянную затухания волны в плазме, глубину проникновения СВЧ поля в плазму, длину СВЧ волны в плазме в области проникновения СВЧ поля, фазовую скорость волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме равна 0.2 см.

Задача №90. СВЧ волна возбуждается в плазме с плотностью электронов $n_e = 3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 78 \text{ Тор}$. Рассчитать постоянную затухания волны в плазме, глубину проникновения СВЧ поля в плазму, длину СВЧ волны в плазме в области проникновения СВЧ поля, фазовую скорость волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме равна 0.2 см .

Задача №91. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 8 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 8.5 \text{ Тор}$. Рассчитать постоянную затухания волны в плазме, глубину проникновения СВЧ поля в плазму, длину СВЧ волны в плазме в области проникновения СВЧ поля, фазовую скорость волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме равна $\lambda = 10 \text{ см}$.

Задача №92. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 7 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 15 \text{ Тор}$. Рассчитать постоянную затухания волны в плазме, глубину проникновения СВЧ поля в плазму, длину СВЧ волны в плазме в области проникновения СВЧ поля, фазовую скорость волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме равна $\lambda = 2 \text{ см}$.

Задача №93. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 8 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 30 \text{ Тор}$. Рассчитать постоянную затухания волны в плазме, глубину проникновения СВЧ поля в плазму, длину СВЧ волны в плазме в области проникновения СВЧ поля. Длина СВЧ волны в вакууме равна $\lambda = 3 \text{ см}$.

Задача №94. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 120 \text{ Тор}$. Рассчитать постоянную затухания волны в плазме, глубину проникновения СВЧ поля в плазму, длину СВЧ волны в плазме в области проникновения СВЧ поля, фазовую скорость волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме равна $\lambda = 1 \text{ см}$.

Задача №95. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 20 \text{ Тор}$. Рассчитать постоянную затухания волны в плазме, глубину проникновения СВЧ поля в плазму, длину СВЧ волны в плазме в области проникновения СВЧ поля. Длина СВЧ волны в вакууме равна $\lambda = 1 \text{ см}$.

Задача №96. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 100 \text{ Тор}$. Определить постоянную затухания волны в плазме, размер скин-слоя, длину волны в плазме, фазовую скорость волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме равна $\lambda = 1 \text{ см}$.

Задача №97. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 10 \text{ Тор}$. Определить постоянную затухания волны в плазме, величину скин-слоя, длину волны в плазме и фазовую скорость волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме равна $\lambda = 1 \text{ см}$.

Задача №98. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 8 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 1 \text{ Тор}$. Рассчитать постоянную затухания волны в плазме, размер скин-слоя в плазме, длину СВЧ волны в плазме в области проникновения СВЧ поля, фазовую скорость волны в плазме. Длина волны в вакууме равна $\lambda = 30 \text{ см}$.

Задача №99. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 5 \text{ Тор}$. Определить постоянную затухания волны в плазме, размер скин-слоя, длину волны в плазме, фазовую скорость волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме равна $\lambda = 2 \text{ см}$.

Задача №100. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 5 \text{ Тор}$. Определить постоянную затухания волны в плазме, размер скин-слоя, длину волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме составляет $\lambda = 3 \text{ см}$.

Задача №101. На слой плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ падает СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 0.8 \text{ см}$. Давление воздуха $p = 10 \text{ Тор}$. Определить коэффициент прохождения СВЧ излучения через слой плазмы толщиной $L = 10 \text{ см}$. Отражение от границы плазмы не учитывать.

Задача №102. На слой плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ падает СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 0.8 \text{ см}$. Давление воздуха $p = 100 \text{ Тор}$. Толщина слоя плазмы $L = 8 \text{ см}$. Определить коэффициент прохождения СВЧ излучения через слой плазмы. Отражение от границы плазмы не учитывать.

Задача №103. На слой плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ по нормали к поверхности падает СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 0.8 \text{ см}$. Давление воздуха $p = 1 \text{ Тор}$. Толщина слоя плазмы $L = 30 \text{ см}$. Определить коэффициент поглощения излучения в слое. Отражение от границы плазмы не учитывать.

Задача №104. На границу раздела воздуха и плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ со стороны воздуха падает по нормали СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 0.8 \text{ см}$. Давление воздуха $p = 1 \text{ Тор}$. Толщина слоя плазмы $L = 100 \text{ см}$. За слоем плазмы находится металлическая плоскость. Определить коэффициент отражения от системы слоя плазмы и металла. Отражение от передней границы плазмы не учитывать. Отражение от металлического листа принять равным 100%.

Задача №105. Рассчитать значения средней осцилляторной энергий электронов в потоке СВЧ излучения длиной волны $\lambda = 10 \text{ см}$ и интенсивностью $I = 1 \text{ МВт/см}^2$. Давление воздуха 1 Тор. Столкновения с молекулами воздуха учитывать. Рассчитать среднюю энергию хаотического движения электронов в конце импульса СВЧ излучения длительностью 10 мкс. Определить значение возможной установившейся (стационарной) энергии хаотического движения электронов и время выхода на это значение энергии. За характерное время выхода на установившуюся энергию принять

время, при котором значение энергии электронов будет составлять 0.865 от стационарного значения.

Задача №106. Рассчитать значение средней энергии осцилляции электронов в потоке СВЧ излучения интенсивностью $I = 1 \text{ кВт/см}^2$, длиной волны $\lambda=30\text{см}$. Столкновения с молекулами воздуха при давлении $p = 1 \text{ Тор}$ учитывать. Рассчитать среднюю энергию хаотического движения электронов в конце импульса СВЧ излучения длительностью 100 мкс. Определить значение установившейся (стационарной) энергии хаотического движения электронов и время выхода на это установившееся значение. За характерное время выхода на эту энергию принять время, при котором значение энергии электронов будет составлять 0.865 от стационарного значения.

Задача №107. Рассчитать значение хаотической энергии электронов в потоке импульсного СВЧ излучения интенсивностью $I = 1 \text{ кВт/см}^2$, длиной волны $\lambda=20 \text{ см}$ в конце импульса длительностью $\tau = 0.5 \text{ мкс}$. Столкновения с молекулами воздуха при давлении $p = 0.2 \text{ Тор}$ учитывать. Определить значение установившейся (стационарной) энергии хаотического движения электронов и время выхода на это значение. За характерное время выхода на стационарную энергию принять время, при котором значение энергии электронов будет составлять 0.865 от стационарного значения энергии.

Задача №108. Рассчитать время установления и значение установившейся (стационарной) хаотической энергии электронов в потоке непрерывного СВЧ излучения интенсивностью $I = 100 \text{ Вт/см}^2$, длиной волны $\lambda = 10 \text{ см}$. Определить значение хаотической энергии электрона в конце импульса СВЧ излучения длительностью $\tau = 0.5 \text{ мкс}$. Столкновения (упругие) с молекулами воздуха при давлении $p = 0.02 \text{ Тор}$ учитывать. За характерное время выхода на установившуюся энергию принять время, при котором значение энергии электронов будет составлять 0.865 от стационарного значения.

Задача №109. На слой плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ со стороны воздуха падает СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 0.8 \text{ см}$. Давление

воздуха в плазме $p = 10$ Тор. Определить коэффициент отражения от слоя, коэффициенты прохождения и поглощения мощности в слое плазмы толщиной 10 см.

Задача №110. На границу раздела воздуха и плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ со стороны воздуха падает СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 0.8$ см. Давление воздуха в плазме $p = 10$ Тор. За слоем плазмы установлена металлическая пластина. Определить коэффициент отражения от системы плазма – металлическая пластина, считая, что коэффициент отражения излучения от металлической пластины составляет 100%. Толщина плазмы перед металлической пластиной составляет 1 см. Отражением от границы плазмы и воздуха пренебречь.

Задача №111. На границу раздела воздуха и плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ со стороны воздуха падает СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 2$ см. Давление воздуха в плазме $p = 100$ Тор. Толщина слоя плазмы $L = 200$ см. Определить коэффициент прохождения СВЧ излучения через слой плазмы.

Задача №112. На границу раздела воздуха и плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ со стороны воздуха по нормали к поверхности падает СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 0.8$ см. Давление воздуха в плазме $p = 1$ Тор. Толщина слоя плазмы $L = 300$ см. Определить коэффициент поглощения в слое плазмы.

Задача №113. На границу раздела воздуха и плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ со стороны воздуха падает по нормали СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 0.8$ см. Давление воздуха в плазме $p = 1$ Тор. Толщина слоя плазмы $L = 100$ см. За слоем плазмы находится металлическая плоскость. Определить коэффициент отражения от системы слоя плазмы и металла. Отражением от границ плазмы пренебречь. Принять величину коэффициента отражения СВЧ излучения от металлической пластины за 100%.

Задача №114. Рассчитать значения максимальной осцилляторной энергии (в эВ) электронов в потоке СВЧ излучения с интенсивностью $I = 1 \text{ МВт/см}^2$ и длиной волны $\lambda = 10 \text{ см}$. Столкновения с молекулами воздуха при давлении 15 тор учитывать. Рассчитать энергию хаотического движения электронов при длительности импульса 20 мкс. Определить возможную величину установившейся (стационарной) хаотической энергии электронов и время выхода на эту энергию. За характерное время выхода на стационарную энергию принять время, при котором значение энергии электронов будет составлять 0.865 от стационарного значения.

Задача №115. Рассчитать осцилляторную энергию (в эВ) электронов в потоке СВЧ излучения с интенсивностью $I = 10^7 \text{ Вт/см}^2$ и длиной волны $\lambda=1\text{см}$. Давление воздуха 20 Тор. Столкновения электронов с молекулами газа учитывать. Длительность импульса СВЧ излучения 100 мкс. Определить возможную величину установившейся хаотической энергии электронов и время выхода на эту энергию в условиях непрерывного СВЧ излучения. За характерное время выхода на стационарную энергию принять время, при котором значение энергии электронов будет составлять 0.865 от стационарного значения.

Задача №116. Рассчитать значение средней энергии осцилляции (в эВ) электронов в потоке СВЧ излучения с интенсивностью $I = 1 \text{ кВт/см}^2$ и длиной волны $\lambda = 30 \text{ см}$. Столкновения с молекулами воздуха при давлении газа $p=1\text{Тор}$ учитывать. Определить возможную величину установившейся хаотической энергии электронов и время выхода на эту энергию в условиях непрерывного СВЧ излучения. За характерное время выхода на стационарную энергию принять время, при котором значение энергии электронов будет составлять 0.865 от стационарного значения.

Задача №117. Рассчитать значение средней осцилляторной энергии (в эВ) электронов в потоке импульсного СВЧ излучения с интенсивностью $I=1\text{кВт/см}^2$ и длиной волны $\lambda = 20 \text{ см}$ в конце импульса длительностью

$\tau=0.5$ мкс. Столкновения с молекулами при давлении воздуха $p = 0.2$ Тор учитывать. Определить так же возможную величину установившейся (стационарной) хаотической энергии электронов и время выхода на эту энергию в условиях непрерывного СВЧ излучения. За характерное время выхода на стационарную энергию принять время, при котором значение энергии электронов будет составлять 0.865 от стационарного значения.

Задача №118. Рассчитать значение средней осцилляторной энергии (в эВ) электронов в потоке СВЧ излучения с интенсивностью $I = 100$ Вт/см² и длиной волны $\lambda = 10$ см в конце импульса длительностью $\tau = 250$ мкс. Столкновения с молекулами при давлении воздуха $p = 0.2$ Тор учитывать. Определить так же возможную величину установившейся (стационарной) хаотической энергии электронов и время выхода на эту энергию в условиях непрерывного СВЧ излучения. За характерное время выхода на стационарную энергию принять время, при котором значение энергии электронов будет составлять 0.865 от стационарного значения.

Задача №119. Рассчитать среднюю осцилляторную энергию (в эВ) электронов в потоке СВЧ излучения с интенсивностью $I = 1200$ Вт/см² и длиной волны $\lambda = 20$ см в конце импульса длительностью $\tau = 0.5$ мкс. Столкновения с молекулами азота при давлении $p = 0.8$ Тор учитывать. Определить возможную величину установившейся (стационарной) хаотической энергии электронов и время выхода на эту энергию в условиях непрерывного СВЧ излучения. За характерное время выхода на стационарную энергию принять время, при котором значение энергии электронов будет составлять 0.865 от стационарного значения.

Задача №120. Рассчитать среднюю осцилляторную энергию (в эВ) электронов в потоке СВЧ излучения с интенсивностью $I = 500$ Вт/см² и длиной волны $\lambda = 16$ см в конце импульса длительностью $\tau = 50$ мкс. Столкновения (упругие) с молекулами азота при давлении $p = 0.2$ Тор учитывать. Определить так же возможную величину установившейся

(стационарной) хаотической энергии электронов и время выхода на эту энергию в условиях непрерывного СВЧ излучения. За характерное время выхода на стационарную энергию принять время, при котором значение энергии электронов будет составлять 0.865 от стационарного значения.

Задача №121. Рассчитать значение максимальной энергии (в эВ) осцилляции электронов и «хаотической» энергии электронов в конце СВЧ импульса длительностью 100 мкс в потоке СВЧ излучения интенсивностью $I = 1 \text{ кВт/см}^2$ и длиной волны $\lambda = 30 \text{ см}$. Столкновения (упругие) с молекулами воздуха при давлении $p = 1 \text{ Тор}$ учитывать. Определить так же возможную величину установившейся (стационарной) хаотической энергии электронов и время выхода на эту энергию в условиях непрерывного СВЧ излучения. За характерное время выхода на стационарную энергию принять время, при котором значение энергии электронов будет составлять 0.865 от стационарного значения.

Задача №122. Рассчитать значение средней энергии осцилляции (в эВ) и средней «хаотической» энергии электронов в потоке импульсного СВЧ излучения с интенсивностью $I = 10 \text{ кВт/см}^2$ и длиной волны $\lambda = 20 \text{ см}$ в конце импульса длительностью $\tau = 0,5 \text{ мкс}$. Столкновения (упругие) с молекулами воздуха при давлении $p = 0.2 \text{ Тор}$ учитывать. Определить так же возможную величину установившейся (стационарной) хаотической энергии электронов и время выхода на эту энергию в условиях непрерывного СВЧ излучения. За характерное время выхода на стационарную энергию принять время, при котором значение энергии электронов будет составлять 0.865 от стационарного значения.

Задача №123. Рассчитать максимальную энергию осцилляции электронов (в эВ) в потоке СВЧ излучения, значение установившейся (стационарной) «хаотической» энергии электронов и характерное время установления этой энергии электронов в потоке непрерывного СВЧ излучения с интенсивностью $I = 100 \text{ Вт/см}^2$ и длиной волны $\lambda = 10 \text{ см}$. Столкновения

(упругие) с молекулами воздуха $p = 0.02$ Тор учитывать. За характерное время выхода на стационарную энергию принять время, при котором значение энергии электронов будет составлять 0.865 от установившегося значения.

Задача №124. На границу раздела воздуха и плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ со стороны воздуха падает СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 2$ см. Давление воздуха $p = 10$ Тор. Определить коэффициент отражения от слоя плазмы, коэффициент прохождения СВЧ излучения через слой плазмы толщиной $L = 20$ см.

Задача №125. На границу раздела воздуха и плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ со стороны воздуха падает СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 0.8$ см. Давление воздуха в плазме $p = 100$ Тор. Толщина слоя плазмы $L = 80$ см. Определить коэффициент отражения от слоя и коэффициент прохождения СВЧ излучения через слой плазмы.

Задача №126. На границу раздела воздуха и плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ со стороны воздуха по нормали к поверхности падает СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 0.8$ см. Давление воздуха в плазме $p = 1$ Тор. Толщина слоя плазмы $L = 30$ см. Определить коэффициент отражения от слоя, коэффициенты прохождения через слой и поглощения СВЧ излучения в слое.

Задача №127. На границу раздела воздуха и плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ со стороны воздуха падает по нормали СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 0.8$ см. Давление воздуха в плазме составляет $p = 10$ Тор. Толщина слоя плазмы $L = 100$ см. За слоем плазмы находится металлическая плоскость. Рассчитать коэффициент отражения СВЧ излучения системы плазма – металл. Принять величину коэффициента отражения СВЧ излучения от металлической плоскости за 100%.

Задача №128. Определить глубину проникновения СВЧ поля длиной волны 30 см в плазму с плотностью электронов $n_e = 10^{10} \text{ см}^{-3}$, создаваемую в

воздухе при давлении $p = 0.5$ Тор. За глубину проникновения принять расстояние в плазме, на котором происходит затухание СВЧ излучения в $e \approx 2,718$ раз.

Задача №129. Определить глубину проникновения СВЧ излучения длиной волны 3 см в плазму с плотностью электронов $n_e = 10^{11} \text{ см}^{-3}$, создаваемую в воздухе при давлении $p = 25$ Тор. За глубину проникновения принять расстояние в плазме, на котором происходит затухание СВЧ излучения в $e \approx 2,718$ раз.

Задача №130. Определить глубину проникновения СВЧ излучения длиной волны 2 см в плазму с плотностью электронов $n_e = 10^{11} \text{ см}^{-3}$, создаваемую в воздухе при давлении $p = 75$ Тор. За глубину проникновения принять расстояние в плазме, на котором происходит затухание СВЧ излучения в $e \approx 2,718$ раз.

Задача №131. Определить глубину проникновения СВЧ излучения длиной волны 2 мм в плазму с плотностью электронов $n_e = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, создаваемую в воздухе при давлении $p = 250$ Тор. За глубину проникновения принять расстояние в плазме, на котором происходит затухание СВЧ излучения в $e \approx 2,718$ раз.

Задача №132. Рассчитать величину и знак ВЧ–квазипотенциала (в эВ) в центре сфокусированного пучка СВЧ излучения с линейной частотой осцилляции поля 3 ГГц с полной мощностью в пучке 10 МВт в однородном постоянном магнитном поле с индукцией 500 Гс. Вектор постоянного магнитного поля ортогонален электрическому СВЧ полю. При расчете считать пространственное распределение интенсивности СВЧ пучка в фокусе гауссовым с характерным радиусом 5 см.

Задача №133. Рассчитать величину ВЧ–квазипотенциала в сфокусированном СВЧ поле частотой 2 ГГц, мощностью СВЧ пучка 10 МВт при гауссовом пространственном распределении интенсивности с характерным радиусом

11 см в постоянном однородном магнитном поле с индукцией 600 Гс. Вектор постоянного магнитного поля ортогонален электрическому СВЧ полю.

Задача №134. Рассчитать величину и знак ВЧ–квазипотенциала (в эВ) в сфокусированном потоке СВЧ излучения с линейной частотой 10 ГГц, мощностью потока 20 МВт, при гауссовом пространственном распределении интенсивности в фокусе с характерным радиусом 3 см в постоянном однородном магнитном поле с индукцией 10000 Гс. Вектор постоянного магнитного поля ортогонален электрическому СВЧ полю.

Задача №135. Рассчитать величину и знак ВЧ–квазипотенциала (в эВ) в сфокусированном потоке СВЧ излучения с линейной частотой 7 ГГц, мощностью СВЧ пучка 1 МВт при гауссовом пространственном распределении СВЧ интенсивности с характерным радиусом 2 см в магнитном поле с индукцией 3800 Гс. Вектор постоянного магнитного поля ортогонален электрическому СВЧ полю.

Задача №136. Рассчитать величину и знак ВЧ–квазипотенциала (в эВ) в сфокусированном потоке СВЧ излучения с линейной частотой 6 ГГц, мощностью 1 МВт при гауссовом пространственном распределении интенсивности в фокусе с характерным радиусом 5 см в магнитном поле с индукцией 1700 Гс. Вектор постоянного магнитного поля ортогонален электрическому СВЧ полю.

Задача №137. Рассчитать значение энергии осцилляции и средней «хаотической» энергии электронов в потоке импульсного СВЧ излучения с интенсивностью $I = 1 \text{ кВт/см}^2$ и длиной волны $\lambda = 20 \text{ см}$ в конце импульса длительностью $\tau = 0.5 \text{ мкс}$. Столкновения (упругие) электронов с молекулами воздуха при давлении $p = 0.2 \text{ Тор}$ учитывать.

Задача №138. Рассчитать энергию осцилляции электронов, характерное время установления стационарной хаотической энергии и значение установившейся энергии электронов в потоке непрерывного СВЧ излучения с интенсивностью $I = 100 \text{ Вт/см}^2$ и длиной волны $\lambda = 10 \text{ см}$. Столкновения

(упругие) электронов с молекулами азота при давлении $p = 0.02$ Тор учитывать.

Задача №139. На границу раздела воздуха и плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ со стороны воздуха падает СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 0.8$ см. Давление воздуха в плазме $p = 10$ Тор. Определить критический угол падения СВЧ излучения, при превышении которого возникнет «полное внутреннее» отражение. Размер плазмы L считать большим по сравнению с длиной волны λ ($L \gg \lambda$). Границу раздела между воздухом и плазмой δL считать резкой ($\lambda \gg \delta L$).

Задача №140. На границу раздела воздуха и плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ со стороны воздуха по нормали к границе раздела падает СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 2$ см. Давление воздуха в плазме $p = 10$ Тор. Определить коэффициент отражения СВЧ излучения от резкой границы ($\lambda \gg \delta L$) воздуха и плазмы. Размер плазмы L считать большим по сравнению с длиной волны λ ($L \gg \lambda$).

Задача №141. На границу раздела воздуха и плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ со стороны воздуха по нормали падает СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 0.8$ см. Давление воздуха в плазме $p = 100$ Тор. Толщина слоя плазмы $L = 8$ см. Определить коэффициент прохождения СВЧ излучения через слой плазмы.

Задача №142. На границу раздела воздуха и плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ со стороны воздуха по нормали к границе раздела падает СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 0.8$ см. Давление воздуха в плазме $p = 1$ Тор. Толщина слоя плазмы $L = 30$ см. Определить коэффициент отражения от слоя плазмы и коэффициент поглощения в слое.

Задача №143. На границу раздела воздуха и плазмы с концентрацией электронов $n_e = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ со стороны воздуха по нормали к границе раздела падает СВЧ излучение длиной волны $\lambda = 0.8$ см. Давление воздуха в плазме $p = 1$ Тор. Толщина слоя плазмы $L = 100$ см. За слоем плазмы находится

металлическая плоскость, отражающая 100% падающего на нее СВЧ излучения. Определить коэффициент отражения СВЧ излучения от системы плазмы – металл.

Задача №144. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 0.5 \text{ Тор}$. Рассчитать постоянную затухания СВЧ волны, размер скин-слоя в плазме, длину волны в плазме, фазовую скорость СВЧ волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме 30 см.

Задача №145. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 25 \text{ Тор}$. Рассчитать постоянную затухания СВЧ поля в плазме, размер скин-слоя в плазме, длину СВЧ волны в плазме, фазовую скорость волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме 3 см.

Задача №146. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 75 \text{ Тор}$. Рассчитать постоянную затухания СВЧ поля в плазме, глубину проникновения СВЧ поля в плазму, длину СВЧ волны в плазме, фазовую скорость волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме 2 см

Задача №147. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 250 \text{ Тор}$. Рассчитать постоянную затухания волны в плазме, размер скин-слоя в плазме, длину СВЧ волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме 0.2 см.

Задача №148. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 0.5 \text{ Тор}$. Рассчитать постоянную затухания СВЧ поля в плазме, размер скин-слоя, длину СВЧ волны в плазме, фазовую скорость волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме 0.2 см.

Задача №149. СВЧ волна распространяется в плазме с концентрацией электронов $n_e = 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, создаваемой в воздухе при давлении $p = 0.5 \text{ Тор}$.

Определить постоянную затухания СВЧ волны в плазме, размер скин-слоя, длину СВЧ волны в плазме. Длина СВЧ волны в вакууме 10 см.

Задача №150. Рассчитать траекторию электрона в СВЧ волне с учетом как электрической, так и магнитной компонент. Интенсивность СВЧ волны $I=10^6 \text{ Вт/см}^2$, длина волны 16 см.

Задача №151. Рассчитать траекторию электрона в поле лазерной излучения с учетом как электрической и магнитной компонент. Интенсивность лазерного излучения $I = 10^{16} \text{ Вт/см}^2$, длина волны 1 мкм.

Контрольные вопросы

1. Электромагнитные волны СВЧ диапазона частот – микроволны. Соотношение микроволн с электромагнитными волнами других частотных диапазонов.
2. СВЧ волноводы: характерные размеры и их связь с поддиапазонами СВЧ волн.
3. Квазиоптические элементы для передачи и фокусировки СВЧ волн.
4. Уравнения Максвелла для вакуума. Вывод волнового уравнения из уравнений Максвелла. Решения волнового уравнения для вакуума.
5. Основные характеристики СВЧ волн: электромагнитные поля, круговая и линейная частоты колебаний, период, волновое число, скорость распространения СВЧ волн. Вектор Пойнтинга. Интенсивность СВЧ излучения.
6. Уравнение движения для электронов в поле СВЧ волны. Зависимость скорости и координаты электронов от параметров СВЧ волны. Формулы для расчета максимальной энергии электронов в поле СВЧ волны, средней осцилляторной энергии электронов в СВЧ поле.
7. Уравнения движения электронов в импульсном СВЧ поле.
8. Решение уравнений движения электронов в импульсном СВЧ поле и их анализ.
9. Общее выражение для энергии электронов после прохождения импульса СВЧ поля.
10. Уравнение движения электронов для резонансного вторично-эмиссионного электронного СВЧ разряда (мультипактора) в волноводе.
11. Энергетический критерий возбуждения мультипакторного СВЧ разряда. Пороговые электрические СВЧ поля и пороговые интенсивности СВЧ излучения для возбуждения мультипакторного СВЧ разряда.
12. Условие синхронизма, необходимое для возбуждения мультипакторного СВЧ разряда. Возбуждение мультипакторных разрядов различной кратности.

13. Вывод формулы для инкремента нарастания электронной лавины в мультипакторном СВЧ разряде. Сравнения критерия нарастания электронной лавины во времени с энергетическим критерием возбуждения мультипакторного СВЧ разряда.

14. Уравнение движения электронов в неоднородном СВЧ поле при градиенте неоднородности, коллинеарном вектору электрического поля СВЧ волны.

15. Определение характерного размера неоднородности электромагнитного поля. Концепция разделения движения электронов в неоднородном СВЧ поле на быстрое и медленное при градиенте неоднородности, коллинеарном вектору электрического поля СВЧ волны. Решение уравнения движения для электронов в этой конфигурации полей и его анализ. Формирование одномерного высокочастотного квазипотенциала.

16. Энергетический инвариант движения электронов в неоднородном СВЧ поле при градиенте неоднородности, коллинеарном вектору электрического поля СВЧ волны.

17. Уравнения движения заряженных частиц в неоднородном потоке СВЧ излучения в конфигурации, когда градиент неоднородности СВЧ поля $\nabla \vec{E}^2(y,t)$ коллинеарен вектору магнитной компоненты $\vec{H}$ СВЧ волны $\nabla \vec{E}^2(y,t) \updownarrow \vec{H}$ с учетом возбуждения дополнительных СВЧ полей, обусловленных неоднородностью потока СВЧ излучения.

18. Решения уравнений движения электронов в потоке неоднородного СВЧ излучения в конфигурации $\nabla \vec{E}^2(y,t) \updownarrow \vec{H}$, когда градиент неоднородности СВЧ поля коллинеарен вектору магнитной компоненты СВЧ волны. Формирования СВЧ квазипотенциала в этой конфигурации неоднородного потока СВЧ излучения.

19. Уравнения движения электронов в однородном потоке СВЧ излучения при наличии постоянного однородного магнитного поля,

коллинеарного волновому вектору СВЧ волны. Понятие электронной циклотронной частоты.

20. Решения уравнений движения электронов в однородном потоке СВЧ излучения при наличии постоянного однородного магнитного поля, коллинеарного волновому вектору СВЧ волны. Характер движения электронов в этой конфигурации полей. Диамагнетизм электронов в постоянном магнитном поле.

21. Вывод формулы энергии электронов при их движении в однородном потоке СВЧ излучения при наличии постоянного однородного магнитного поля, коллинеарного волновому вектору СВЧ волны. Электронный циклотронный резонанс в данной конфигурации полей.

22. Уравнения движения электронов в однородном потоке СВЧ излучения при наличии постоянного однородного магнитного поля, коллинеарного вектору магнитной компоненты СВЧ волны. Электронная циклотронная частота.

23. Решения уравнений движения электронов в однородном потоке СВЧ излучения при наличии постоянного однородного магнитного поля, коллинеарного вектору магнитной компоненты СВЧ волны. Характер движения электронов в этой конфигурации полей. Диамагнетизм электронов в постоянном магнитном поле.

24. Вывод формулы энергии электронов при их движении в однородном потоке СВЧ излучения и постоянном однородном магнитном поле, коллинеарным вектору магнитной компоненты СВЧ волны. Электронный циклотронный резонанс в данной конфигурации полей.

25. Уравнения движения электронов в неоднородном потоке СВЧ излучения в постоянном однородном магнитном поле в конфигурации, когда градиент неоднородности потока СВЧ излучения коллинеарен вектору электрического поля СВЧ волны и одновременно ортогонален вектору постоянного однородного магнитного поля: $\nabla \vec{E}^2 \updownarrow \vec{E}(x,t) \perp \vec{H}_0$.

26. Решения уравнений движения электронов в неоднородном потоке СВЧ излучения при наличии постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$ в конфигурации, когда градиент неоднородности потока СВЧ излучения $\nabla \vec{E}^2$ коллинеарен вектору электрического поля $\vec{E}_\omega(x,t)$ СВЧ волны и одновременно ортогонален вектору постоянного однородного магнитного поля, который коллинеарен вектору магнитной компоненты СВЧ поля $\vec{H}_\omega$:

$$\nabla \vec{E}^2 \updownarrow \vec{E}_\omega(x,t) \perp \vec{H}_0 \updownarrow \vec{H}_\omega.$$

27. Получение формулы для СВЧ квазипотенциала $\Phi_H(x)$ в конфигурации полей, когда градиент неоднородности потока СВЧ излучения $\nabla \vec{E}_\omega^2$ коллинеарен вектору электрического поля $\vec{E}_\omega(x,t)$ СВЧ волны и одновременно ортогонален вектору постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$, который коллинеарен вектору магнитной компоненты СВЧ поля $\vec{H}_\omega$:

$$\vec{H}_\omega: \nabla \vec{E}_\omega^2 \updownarrow \vec{E}_\omega(x,t) \perp \vec{H}_0 \square \vec{H}_\omega.$$

28. Энергетический инвариант движения электронов в условиях действия СВЧ волны и постоянного магнитного поля в конфигурации полей, когда градиент неоднородности потока СВЧ излучения $\nabla \vec{E}_\omega^2$ коллинеарен вектору электрического $\vec{E}_\omega(x,t)$ поля СВЧ волны и одновременно ортогонален вектору постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$, который коллинеарен вектору магнитной компоненты СВЧ поля $\vec{H}_\omega$:

$$\nabla \vec{E}_\omega^2 \updownarrow \vec{E}_\omega(x,t) \perp \vec{H}_0 \square \vec{H}_\omega.$$

29. Анализ движения электронов в условиях действия СВЧ квазипотенциала в конфигурации полей, когда градиент неоднородности потока СВЧ излучения коллинеарен вектору электрического поля СВЧ волны и одновременно ортогонален вектору постоянного однородного магнитного поля, коллинеарного вектору магнитной компоненты СВЧ поля:

$\nabla \vec{E}_\omega^2 \updownarrow \vec{E}_\omega(x,t) \perp \vec{H}_0 \square \vec{H}_\omega$ при приближении круговой частоты СВЧ поля к электронной циклотронной частоте.

30. Уравнения движения электронов в неоднородном потоке СВЧ излучения и постоянном магнитном поле в конфигурации, когда градиент неоднородности потока СВЧ излучения $\nabla \vec{E}_\omega^2$ ортогонален вектору электрического поля $\vec{E}_\omega$ СВЧ волны, коллинеарен вектору магнитной компоненты СВЧ поля $\vec{H}_\omega$ и ортогонален вектору постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$, направленного параллельно волновому вектору СВЧ волны $\vec{k}$: $\nabla \vec{E}_\omega^2 \perp \vec{E}_\omega$; $\nabla \vec{E}_\omega^2 \updownarrow \vec{H}_\omega \perp \vec{H}_0 \square \vec{k}$.

31. Решения уравнений движения электронов в неоднородном потоке СВЧ излучения и в постоянном однородном магнитном поле в конфигурации, когда градиент неоднородности потока СВЧ излучения $\nabla \vec{E}_\omega^2$ ортогонален вектору электрического поля $\vec{E}_\omega$ СВЧ волны и одновременно коллинеарен вектору магнитной компоненты СВЧ поля $\vec{H}_\omega$ и ортогонален вектору постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$, направленного параллельно волновому вектору СВЧ волны $\vec{k}$: $\nabla \vec{E}_\omega^2 \perp \vec{E}_\omega$; $\nabla \vec{E}_\omega^2 \updownarrow \vec{H}_\omega \perp \vec{H}_0 \square \vec{k}$.

32. Получение формулы для СВЧ квазипотенциала $\Phi_{\omega H}(y)$ в конфигурации полей, когда градиент неоднородности потока СВЧ излучения $\nabla \vec{E}_\omega^2$ ортогонален вектору электрического поля $\vec{E}_\omega$ СВЧ волны и одновременно коллинеарен вектору магнитной компоненты СВЧ поля $\vec{H}_\omega$ и ортогонален вектору постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$, направленного параллельно волновому вектору СВЧ волны $\vec{k}$: $\nabla \vec{E}_\omega^2 \perp \vec{E}_\omega$; $\nabla \vec{E}_\omega^2 \updownarrow \vec{H}_\omega \perp \vec{H}_0 \square \vec{k}$.

33. Энергетический инвариант движения электронов в условиях действия СВЧ волны и постоянного однородного магнитного поля в конфигурации полей, когда градиент неоднородности потока СВЧ излучения $\nabla \vec{E}_\omega^2$ ортогонален вектору электрического поля $\vec{E}_\omega$ СВЧ волны, коллинеарен вектору магнитной компоненты СВЧ поля $\vec{H}_\omega$ и ортогонален вектору постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$, направленного параллельно волновому вектору СВЧ волны $\vec{k}$: $\nabla \vec{E}_\omega^2 \perp \vec{E}_\omega$; $\nabla \vec{E}_\omega^2 \updownarrow \vec{H}_\omega \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{k}$.

34. Анализ движения электронов в условиях действия СВЧ квазипотенциала в конфигурации полей, когда градиент неоднородности потока СВЧ излучения $\nabla \vec{E}_\omega^2$ ортогонален вектору электрического поля $\vec{E}_\omega$ СВЧ волны и одновременно коллинеарен вектору магнитной компоненты СВЧ поля $\vec{H}_\omega$ и ортогонален вектору постоянного однородного магнитного поля $\vec{H}_0$, направленного параллельно волновому вектору СВЧ волны $\vec{k}$: $\nabla \vec{E}_\omega^2 \perp \vec{E}_\omega$; $\nabla \vec{E}_\omega^2 \updownarrow \vec{H}_\omega \perp \vec{H}_0 \parallel \vec{k}$ при приближении круговой частоты СВЧ поля к электронной циклотронной частоте.

35. Вывод формулы, определяющей долю энергии, передающейся от быстрого электрона медленному атому при их упругом столкновении.

36. Диаграмма упругого столкновения электрона с атомом и вывод формулы для силы торможения электрона при упругих столкновениях в атомами газа.

37. Вывод уравнения движения электрона в СВЧ поле при учете упругих столкновений электронов с атомами газа.

38. Получение формулы для скорости электрона в СВЧ поле с учетом столкновений электронов с атомами газа и ее анализ.

39. Вывод уравнения для энергии электронов в СВЧ поле при наличии упругих столкновений электронов с атомами в слабоионизованной плазме.

40. Решение уравнения для энергии электронов в СВЧ поле при наличии упругих столкновений электронов с атомами в слабоионизованной плазме.

41. Вывод формулы для поглощения удельной мощности СВЧ излучения в плазме.

42. Получение выражения для электропроводности плазмы в СВЧ поле из формулы для удельного поглощения мощности СВЧ излучения в плазме.

43. Уравнение Бугера-Ламберта и его решение. Характерная длина поглощения СВЧ излучения в плазме.

44. Формула для вычисления коэффициента прохождения СВЧ излучения через слой слабоионизованной плазмы низкой плотности. Формула для коэффициента поглощения СВЧ излучения в слое плазмы.

45. Формула для плотности тока в плазме в СВЧ поле с учетом столкновений.

46. Вывод формулы диэлектрической проницаемости плазмы в СВЧ поле с учетом столкновений.

47. Вывод формулы для электропроводности плазмы из сравнения выражения плотности тока в уравнении Максвелла и формулы для плотности тока, полученной из уравнения движения электронов в СВЧ поле с учетом столкновений.

48. Анализ электропроводности плазмы в СВЧ поле при различных соотношениях круговой частоты СВЧ поля, частоты столкновений электронов с атомами и ленгмюровской частоты плазмы.

49. Анализ диэлектрической проницаемости плазмы в СВЧ поле при различных соотношениях круговой частоты СВЧ поля, частоты столкновений электронов с атомами и ленгмюровской частоты плазмы.

50. Комплексное представление СВЧ волн. Доказательство того, что комплексное представление СВЧ волны удовлетворяет решению волнового уравнения.

51. Формула для плотности тока в плазме при комплексном представлении зависимости плотности тока от электрического поля. Формула комплексного представления электропроводности плазмы в СВЧ поле.

52. Формула плотности тока в плазме при комплексном представлении зависимости плотности тока от временной производной электрического поля. Формула комплексного представления диэлектрической проницаемости плазмы в СВЧ поле.

53. Получение формулы комплексной электропроводности плазмы в СВЧ полях и ее анализ.

54. Получение формулы для комплексной диэлектрической проницаемости плазмы в СВЧ полях и ее анализ. Понятие критической концентрации плазмы для СВЧ волны.

55. Зависимость формул для электропроводности и комплексной диэлектрической проницаемости плазмы от комплексной формы представления СВЧ волны.

56. Вывод волнового уравнения для СВЧ волны в плазме с использованием комплексного представления электропроводности плазмы.

57. Общее решение волнового уравнения распространения СВЧ волн в плазме.

58. Вывод формулы для волнового числа СВЧ волны в плазме.

59 Вывод формулы для затухания СВЧ поля в плазме.

60. Вывод формул для волнового числа, длины СВЧ волны, для фазовой скорости, постоянной затухания и скин-слоя для СВЧ волны в плазме с параметрами: концентрация электронов в плазме существенно меньше критической, частота столкновений меньше частоты СВЧ волны и частоты плазмы.

61. Вывод формул для волнового числа, длины волны, фазовой скорости, постоянной затухания и скин-слоя для СВЧ волны в плазме с

параметрами: концентрация электронов в плазме существенно больше критической, частота столкновений меньше частоты СВЧ волны.

62. Вывод волнового уравнения для СВЧ волны в плазме с использованием комплексной диэлектрической проницаемости.

63. Вывод формул для волнового числа, длины волны, фазовой скорости, постоянной затухания и скин-слоя для СВЧ волны в плазме с параметрами: концентрация электронов в плазме существенно меньше критической, частота столкновений больше частоты СВЧ волны.

64. Вывод формул для волнового числа, длины волны, фазовой скорости, постоянной затухания и скин-слоя для СВЧ волны в плазме с параметрами: концентрация электронов в плазме существенно больше критической, частота столкновений существенно больше частоты СВЧ волны и частоты плазмы.